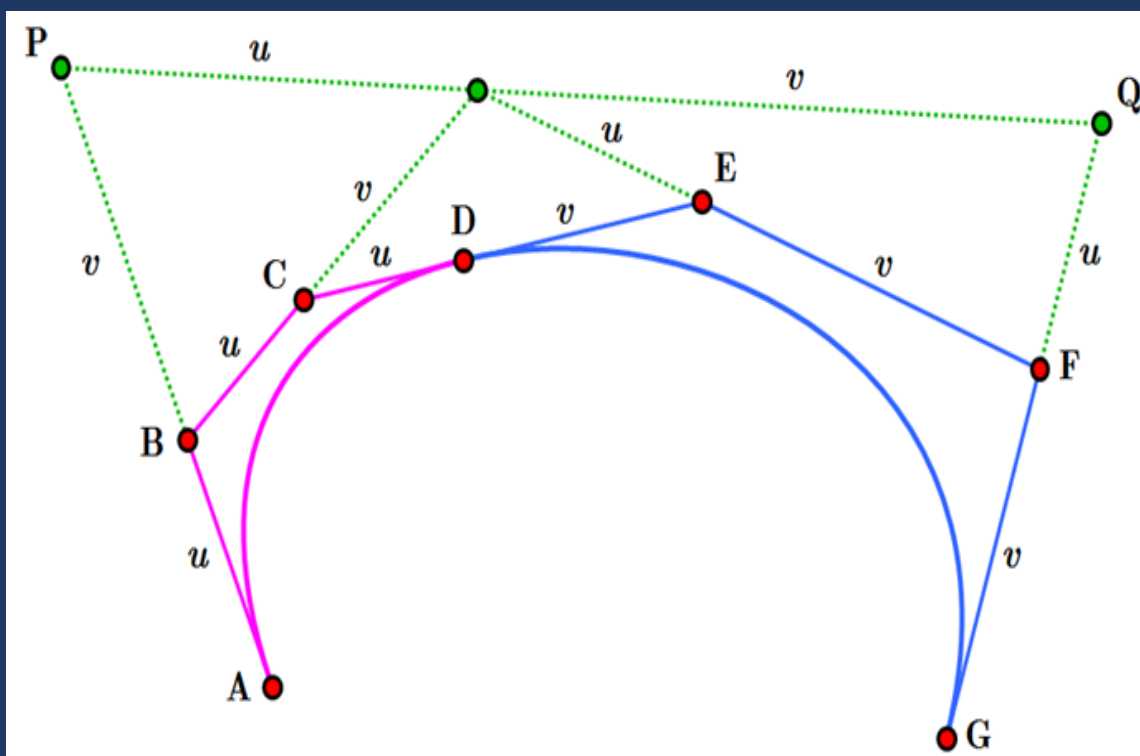


# Ομοπαράλληλοι Χώροι και Γεωμετρική Μοντελοποίηση

Πετρούλα Δόσπρα και Δημήτριος Πουλάκης



**ΟΜΟΠΑΡΑΛΛΗΛΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ  
ΚΑΙ  
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ**



# Ομοπαράλληλοι Χώροι και Γεωμετρική Μοντελοποίηση

---

Πετρούλα Δόσπρα  
Διδάκτωρ Μαθηματικός

Δημήτρης Πουλάκης  
Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης

Τίτλος πρωτοτύπου: «Ομοπαράλληλοι Χώροι και Γεωμετρική Μοντελοποίηση»  
Copyright © 2022, ΚΑΛΛΙΠΟΣ, ΑΝΟΙΚΤΕΣ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ



Το παρόν έργο διατίθεται με τους όρους της άδειας Creative Commons Αναφορά Δημιουργού – Μη Εμπορική Χρήση – Παρόμοια Διανομή 4.0. Για να δείτε τους όρους της άδειας αυτής επισκεφτείτε τον ιστότοπο <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/legalcode.el>

Αν τυχόν κάποιο τμήμα του έργου διατίθεται με διαφορετικό καθεστώς αδειοδότησης, αυτό αναφέρεται ρητά και ειδικώς στην οικεία θέση.

#### Συντελεστές έκδοσης

Γλωσσική επιμέλεια:

Δημήτριος Καλλιάρας

Γραφιστική επιμέλεια:

Τεχνική επεξεργασία:

Δημήτριος Καρατζίδης

## ΚΑΛΛΙΠΟΣ

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Ηρώων Πολυτεχνείου 9

15780 Ζωγράφου

[www.kallipos.gr](http://www.kallipos.gr)

Βιβλιογραφική αναφορά:

Δόσπρα, Π, & Πουλάκης, Δ (2022). *Ομοπαράλληλοι Χώροι και Γεωμετρική Μοντελοποίηση* [Προπτυχιακό εγχειρίδιο]. Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις.

Διαθέσιμο στο:

<http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-74>

ISBN:

978-618-85850-9-6

*Αφιερώνεται στην πολυαγαπημένη μας κόρη,*

*Ηγησώ.*



# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

---

Εισαγωγή	v
<b>1 Ομοπαράλληλοι Χώροι</b>	<b>1</b>
1.1 Ορισμοί - Παραδείγματα	1
1.2 Βαρύκεντρα	7
1.3 Ομοπαράλληλοι Υποχώροι	11
1.4 Ομοπαράλληλα Πλαίσια	16
1.5 Ασκήσεις-Εργασίες	20
Ασκήσεις	20
<b>2 Κλασικά Θεωρήματα</b>	<b>25</b>
2.1 Βαρύκεντρο τριγώνου	25
2.2 Το Θεώρημα του Θαλή	27
2.3 Το Θεώρημα του Πάππου	29
2.4 Το Θεώρημα του Μενελάου	31
2.5 Το Θεώρημα του <i>Desargues</i>	32
2.6 Το Θεώρημα του <i>Ceva</i>	33
2.7 Ασκήσεις-Εργασίες	35
Ασκήσεις	35
<b>3 Ομοπαράλληλες Απεικονίσεις</b>	<b>39</b>
3.1 Ορισμός - Βασικές Ιδιότητες	39
3.2 Ομοπαράλληλες Ομάδες	46
3.3 Ομοπαράλληλες Μορφές	48
3.4 Ασκήσεις-Εργασίες	49
Ασκήσεις	49
<b>4 Γραμμικοποίηση Ομοπαράλληλου Χώρου</b>	<b>51</b>
4.1 Κατασκευή της Γραμμικοποίησης	51
4.2 Βάσεις του διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$	56
4.3 Γραμμικοποίηση Ομοπαράλληλων Απεικονίσεων	59



4.4	Ασκήσεις-Εργασίες . . . . .	61
	Ασκήσεις . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Πολυμομοπαράλληλικές Απεικονίσεις</b>	<b>63</b>
5.1	Πολυγραμμικές και Πολυμομοπαράλληλικές Απεικονίσεις . . . . .	63
5.2	Πολικές Μορφές . . . . .	70
5.3	Γραμμικοποίηση . . . . .	75
5.4	Ασκήσεις-Εργασίες . . . . .	80
	Ασκήσεις . . . . .	80
<b>6</b>	<b>Πολυωνυμικές Καμπύλες</b>	<b>83</b>
6.1	Καμπύλες και Σημεία Ελέγχου . . . . .	83
6.2	Πολύωνυμα του <i>Bernstein</i> . . . . .	87
6.3	Ένας Χαρακτηρισμός των Πολυωνυμικών Καμπυλών . . . . .	89
6.4	Μορφή του <i>Bézier</i> . . . . .	93
6.5	Ασκήσεις-Εργασίες . . . . .	97
	Ασκήσεις . . . . .	97
<b>7</b>	<b>Αλγόριθμοι και Παράγωγοι Καμπυλών</b>	<b>101</b>
7.1	Αλγόριθμος του <i>de Casteljau</i> . . . . .	101
	7.1.1 Η Περίπτωση $m = 2$ . . . . .	101
	7.1.2 Η Περίπτωση $m = 3$ . . . . .	103
	7.1.3 Η Γενική Περίπτωση . . . . .	105
7.2	Αλγόριθμος Υποδιαίρεσης . . . . .	107
7.3	Αλγόριθμος του <i>de Boor</i> . . . . .	110
7.4	Παράγωγος Καμπύλης . . . . .	115
7.5	Συνένωση Καμπυλών . . . . .	119
7.6	Ασκήσεις-Εργασίες . . . . .	123
	Ασκήσεις . . . . .	123
<b>8</b>	<b>Καμπύλες B-Spline</b>	<b>127</b>
8.1	Άπειρες Ακολουθίες Κόμβων . . . . .	127
8.2	Ειδικές Ακολουθίες Κόμβων . . . . .	131
	8.2.1 Κυκλικές Ακολουθίες Κόμβων . . . . .	131
	8.2.2 Πεπερασμένες Ακολουθίες Κόμβων . . . . .	133
8.3	Σημεία και Κόμβοι . . . . .	135
	8.3.1 Υπολογισμός Σημείων . . . . .	135
	8.3.2 Εισαγωγή Κόμβων . . . . .	136
	8.3.3 Ιδιότητες των <i>B - spline</i> Καμπυλών . . . . .	137
8.4	<i>B - spline</i> συναρτήσεις . . . . .	137
	Ασκήσεις . . . . .	141
<b>9</b>	<b>Καμπύλες Παρεμβολής</b>	<b>145</b>
9.1	Η Μέθοδος του <i>Vandermonde</i> . . . . .	145
9.2	Ο Αλγόριθμος του <i>Aitken</i> . . . . .	147
9.3	Τα Πολύωνυμα του <i>Lagrange</i> . . . . .	149
9.4	Κυβική Παρεμβολή του <i>Hermite</i> . . . . .	151
9.5	Κυβική <i>B - spline</i> Παρεμβολή . . . . .	157
	Ασκήσεις . . . . .	161

<b>10 Πολυωνυμικές Επιφάνειες</b>	<b>163</b>
10.1 Επιφάνειες Ολικού Βαθμού σε Πολική Μορφή . . . . .	163
10.2 Αλγόριθμος του <i>de Casteljaui</i> για Επιφάνειες Ολικού Βαθμού . . . . .	169
10.2.1 Η Περίπτωση $m = 2$ . . . . .	170
10.2.2 Η Γενική Περίπτωση . . . . .	171
10.3 Αλγόριθμος Υποδιαίρεσης για Επιφάνειες Ολικού Βαθμού . . . . .	174
10.4 Διπολυωνυμικές Επιφάνειες σε Πολική μορφή . . . . .	181
10.5 Αλγόριθμος του <i>de Casteljaui</i> για Διπολυωνυμικές Επιφάνειες . . . . .	187
10.6 Αλγόριθμος Υποδιαίρεσης για Διπολυωνυμικές Επιφάνειες . . . . .	192
Ασκήσεις . . . . .	196
<b>Παράρτημα: Πραγματικοί Διανυσματικοί Χώροι</b>	<b>199</b>
A.1 Ορισμοί - Βασικές Ιδιότητες . . . . .	199
A.2 Διανυσματικοί Υποχώροι . . . . .	201
A.3 Βάση Διανυσματικού Χώρου . . . . .	203
A.4 Γραμμικές Απεικονίσεις . . . . .	206
A.5 Πίνακες και Γραμμικές Απεικονίσεις . . . . .	208
<b>Ευρετήριο</b>	<b>213</b>



## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

---

Από τις αρχές της δεκαετίας του '70, η Γεωμετρία και ειδικότερα ο κλάδος της Υπολογιστικής Γεωμετρίας έχει παρουσιάσει πολύ μεγάλη ανάπτυξη και έχει δώσει αποτελεσματικούς αλγόριθμους και τεχνικές για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων στον σχεδιασμό σχημάτων διαφόρων συσκευών, στη βιομηχανία αυτοκινήτων, πλοίων, αεροσκαφών, καθώς επίσης και στη Γεωλογία, στην Αρχιτεκτονική, στα Γραφικά των Υπολογιστών, στην Κινηματική, στη Ρομποτική κ.α. Σκοπός του παρόντος βιβλίου είναι να δώσει μία εισαγωγή στις απαραίτητες γεωμετρικές έννοιες για τη μελέτη προβλημάτων Γεωμετρικής Μοντελοποίησης. Πιο συγκεκριμένα, δίνεται μία εισαγωγή στην Ομοπαράλληλη Γεωμετρία και παρουσιάζονται βασικές έννοιες και αποτελέσματά της. Σε αυτά τα θέματα περιέχεται όλο το απαραίτητο υπόβαθρο γνώσεων το οποίο θα αποτελέσει τη βάση για την παρουσίαση στη συνέχεια των παραμετρικών καμπυλών και επιφανειών, καθώς και των βασικών αλγορίθμων τους οι οποίοι χρησιμοποιούνται στη Γεωμετρική Μοντελοποίηση.

Το παρόν βιβλίο αποτελείται από δέκα κεφάλαια και ένα παράρτημα. Τα πρώτα πέντε κεφάλαια είναι μία εισαγωγή στους ομοπαράλληλους χώρους και απεικονίσεις, ενώ τα άλλα πέντε μελετούν βασικά εργαλεία της Γεωμετρικής Μοντελοποίησης. Πιο συγκεκριμένα: Στο πρώτο κεφάλαιο εισάγονται οι έννοιες του ομοπαράλληλου χώρου, βαρύκεντρου, ομοπαράλληλου υποχώρου, ομοπαράλληλου πλαισίου και δίνονται οι βασικές τους ιδιότητες. Το δεύτερο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στα κλασικά θεωρήματα των Θαλή, Πάππου, Μενελάου, Desargues και Ceva. Στο τρίτο κεφάλαιο μελετώνται οι ομοπαράλληλες απεικονίσεις, ομάδες και μορφές. Η εμφύτευση ενός ομοπαράλληλου χώρου μέσα σε έναν γραμμικό χώρο και η επέκταση των ομοπαράλληλων απεικονίσεων σε γραμμικές είναι το αντικείμενο του τετάρτου κεφαλαίου. Στο πέμπτο κεφάλαιο εισάγεται η έννοια της πολυομοπαράλληλης απεικόνισης, της πολικής της μορφής και παρουσιάζονται βασικές ιδιότητές τους. Οι πολωνυμικές καμπύλες είναι το αντικείμενο του έκτου κεφαλαίου. Ειδικότερα, μελετάται η μορφή του Βέζιερ αυτών των καμπυλών η οποία αποτελεί βασικό εργαλείο σχεδίασης γραφικών στους υπολογιστές. Στο έβδομο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι αλγόριθμοι των de Casteljau, de Boor, ο αλγόριθμος υποδιαίρεσης και μελετάται η συνένωση δύο καμπυλών. Το όγδοο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στις B-spline καμπύλες, στις βασικές τους ιδιότητες και αλγόριθμους. Στο ένατο κεφάλαιο μελετώνται οι καμπύλες παρεμβολής και ειδικότερα οι μέθοδοι των Vandermonde, Aitken, τα πολυώνυμα του Langrange και οι κυβικές παρεμβολές του Hermite και B-spline. Οι πολωνυμικές επιφάνειες μελετώνται στο δέκατο κεφάλαιο σε σχέση με τον τρόπο κατά τον οποίο έχουμε ορίσει τις πολικές μορφές τους και παρουσιάζονται εκδοχές του αλγορίθμου του de Casteljau και του αλγορίθμου υποδιαίρεσης. Τέλος, το παράρτημα περιέχει όλες τις έννοιες και τα βασικά αποτελέσματα της Γραμμικής Άλγεβρας τα οποία χρησιμοποιούνται στο κείμενό μας.

Θα χρησιμοποιούμε τα συνήθη σύμβολα της Θεωρίας Συνόλων:  $\in$ ,  $\subseteq$ ,  $\subset$ ,  $\cap$  και  $\cup$ . Αν  $X$  και  $Y$  είναι υποσύνολα του ίδιου συνόλου, τότε συμβολίζουμε με  $X \setminus Y$  το σύνολο των στοιχείων του  $X$  που δεν ανήκουν στο  $Y$ . Επίσης, θα συμβολίζουμε με  $\mathbb{N}$  το σύνολο των φυσικών αριθμών  $\{0, 1, 2, \dots\}$ , με  $\mathbb{Z}$  το σύνολο των ακεραίων

αριθμών και με  $\mathbb{Q}$  και  $\mathbb{R}$  τα σύνολα των ρητών και πραγματικών αριθμών, αντίστοιχα. Ας είναι  $f : A \rightarrow B$  μία απεικόνιση. Θα λέμε ότι η  $f$  είναι ένεση, αν για κάθε  $x, y \in A$  με  $x \neq y$  έχουμε  $f(x) \neq f(y)$  και έφεση αν για κάθε  $z \in B$  υπάρχει  $x \in A$  με  $f(x) = z$ . Αν η  $f$  είναι ένεση και έφεση, τότε θα λέμε ότι είναι αμφίεση. Τέλος, αν  $C \subset A$ , τότε θα συμβολίζουμε με  $f|_C$  τον περιορισμό της  $f$  επί του  $C$ .

Θεσσαλονίκη

Νοέμβριος 2021

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

---

## ΟΜΟΠΑΡΑΛΛΗΛΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

---

### Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται βασικές έννοιες της ομοπαρλληλικής γεωμετρίας. Ειδικότερα μελετώνται οι ομοπαρλληλικοί χώροι, βαρύκεντρα, ομοπαρλληλικοί υποχώροι και πλαίσια. Για περισσότερες πληροφορίες ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στις βιβλιογραφικές αναφορές οι οποίες παρατίθενται στο τέλος του κεφαλαίου.

### 1.1 Ορισμοί - Παραδείγματα

Ας είναι  $\mathcal{E}$  ένα μη κενό σύνολο,  $\vec{\mathcal{E}}$  ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και  $+ : \mathcal{E} \times \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{E}$  μία απεικόνιση. Θα συμβολίζουμε συνήθως τα στοιχεία του  $\mathcal{E}$  με λατινικά γράμματα,  $a, b, c, \dots, A, B, C, \dots$ , ενώ τα στοιχεία του  $\vec{\mathcal{E}}$  με λατινικά γράμματα τα οποία φέρουν βελάκια,  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots, \vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \dots$ . Επίσης, θα συμβολίζουμε με  $\vec{0}$ , το ουδέτερο στοιχείο για την πρόσθεση του  $\vec{\mathcal{E}}$ .

**Ορισμός 1.1.** Η τριάδα  $(\mathcal{E}, \vec{\mathcal{E}}, +)$  καλείται ομοπαρλληλικός χώρος, αν ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

(A1) Για κάθε  $a \in \mathcal{E}$ , έχουμε  $a + \vec{0} = a$ .

(A2) Για κάθε  $a \in \mathcal{E}$  και  $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}$  ισχύει  $(a + \vec{u}) + \vec{v} = a + (\vec{u} + \vec{v})$ .

(A3) Για κάθε  $a, b \in \mathcal{E}$  υπάρχει μοναδικό  $\vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}$  τέτοιο, ώστε  $a + \vec{v} = b$ . Το στοιχείο  $\vec{v}$  συμβολίζεται με  $\vec{ab}$  ή  $b - a$ .

Τα στοιχεία του  $\mathcal{E}$  καλούνται σημεία και τα στοιχεία του  $\vec{\mathcal{E}}$  διανύσματα του ομοπαρλληλικού χώρου  $(\mathcal{E}, \vec{\mathcal{E}}, +)$ .

Συχνά θ' αναφέρουμε έναν ομοπαρλληλικό χώρο  $(\mathcal{E}, \vec{\mathcal{E}}, +)$  ως ομοπαρλληλικό χώρο  $\mathcal{E}$  όταν υπονοείται ο διανυσματικός χώρος  $\vec{\mathcal{E}}$  και η απεικόνιση  $+$ .

**Ορισμός 1.2.** Διάσταση του ομοπαρλληλικού χώρου  $(\mathcal{E}, \vec{\mathcal{E}}, +)$  καλείται η διάσταση του  $\vec{\mathcal{E}}$  και συμβολίζεται με  $\dim \mathcal{E}$ , δηλαδή  $\dim \mathcal{E} = \dim \vec{\mathcal{E}}$ .

**Πρόταση 1.1.** Ας είναι  $a \in \mathcal{E}$ . Τότε, οι απεικονίσεις

$$\Psi_a : \mathcal{E} \rightarrow \vec{\mathcal{E}}, b \mapsto \vec{ab}$$

και

$$\Phi_a : \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{E}, \vec{u} \mapsto a + \vec{u}$$

είναι αμφιέσεις και ισχύει  $\Psi_a = \Phi_a^{-1}$ .

*Απόδειξη.* Για κάθε  $b \in \mathcal{E}$  έχουμε:

$$(\Phi_a \circ \Psi_a)(b) = \Phi_a(\Psi_a(b)) = \Phi_a(\vec{ab}) = a + \vec{ab} = b.$$

Επίσης, για κάθε  $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}$  ισχύει:

$$(\Psi_a \circ \Phi_a)(\vec{u}) = \Psi_a(\Phi_a(\vec{u})) = \Psi_a(a + \vec{u}) = \vec{u}.$$

΄ρα, οι απεικονίσεις  $\Phi_a$  και  $\Psi_a$  είναι αμφιέσεις και η μία είναι αντίστροφη της άλλης.  $\square$

**Παράδειγμα 1.1.** Ας είναι  $\mathcal{E} = \{a\}$  και  $\vec{\mathcal{E}} = \{\vec{0}\}$ . Επίσης, θεωρούμε την απεικόνιση  $+$  :  $\mathcal{E} \times \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{E}$  με  $a + \vec{0} = a$ . Η τριάδα  $(\mathcal{E}, \vec{\mathcal{E}}, +)$  είναι ένας ομοπαράλληλικός χώρος διάστασης 0.

**Παράδειγμα 1.2.** Ας είναι  $\vec{\mathcal{E}}$  ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Θέτοντας  $\mathcal{E} = \vec{\mathcal{E}}$  και θεωρώντας ως απεικόνιση  $+$  την πρόσθεση των στοιχείων του  $\vec{\mathcal{E}}$ , ορίζουμε τον ομοπαράλληλικό χώρο  $(\mathcal{E}, \vec{\mathcal{E}}, +)$ , ο οποίος καλείται *κανονική ομοπαράλληλική δομή* επί του  $\vec{\mathcal{E}}$ . Στην περίπτωση όπου  $\vec{\mathcal{E}} = \mathbb{R}^n$ , θα συμβολίζουμε με  $A^n$  το αντίστοιχο σύνολο  $\mathcal{E}$  και έτσι έχουμε τον ομοπαράλληλικό χώρο  $(A^n, \mathbb{R}^n, +)$ , ο οποίος καλείται *πραγματικός ομοπαράλληλικός χώρος διάστασης n*. Για να διακρίνουμε τα στοιχεία του  $\mathbb{R}^n$  ως σημεία του  $A^n$  και ως διανύσματα του  $\mathbb{R}^n$ , θα τα γράφουμε ως διανύσματα-γραμμές και ως διανύσματα-στήλες, αντίστοιχα. Έτσι, έχουμε

$$(a_1, \dots, a_n) + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

για κάθε  $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$  και  $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ . Επίσης, αν  $v$  είναι ένα σημείο του  $A^n$ , τότε θα συμβολίζουμε με  $\vec{v}$  το αντίστοιχο διάνυσμα-στήλη.

**Παράδειγμα 1.3.** Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{E} = \{(x, 1) / x \in \mathbb{R}\},$$

τον πραγματικό διανυσματικό χώρο

$$\vec{\mathcal{E}} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} / a \in \mathbb{R} \right\}$$

και την απεικόνιση

$$+ : \mathcal{E} \times \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{E}, ((x, 1), \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}) \mapsto (x + a, 1).$$

Θα δείξουμε ότι η τριάδα  $(\mathcal{E}, \vec{\mathcal{E}}, +)$  αποτελεί έναν ομοπαράλληλικό χώρο. Πράγματι, για κάθε  $(x, 1) \in \mathcal{E}$  ισχύει:

$$(x, 1) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (x + 0, 1) = (x, 1).$$

Για κάθε  $(x, 1) \in \mathcal{E}$  και  $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \in \vec{\mathcal{E}}$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \left( (x, 1) + \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} &= (x + a, 1) + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}, \\ &= ((x + a) + b, 1), \\ &= (x + (a + b), 1), \\ &= (x, 1) + \begin{pmatrix} a + b \\ 0 \end{pmatrix}, \\ &= (x, 1) + \left( \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Ας είναι  $(x, 1), (y, 1) \in \mathcal{E}$ . Θέτουμε  $a = y - x$  και έχουμε:

$$(x, 1) + \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = (x + a, 1) = (y, 1).$$

Καθώς ο πραγματικός αριθμός  $a$  είναι ο μοναδικός με την ιδιότητα  $x + a = y$ , το διάνυσμα  $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \in \vec{\mathcal{E}}$  που ικανοποιεί την παραπάνω ισότητα είναι επίσης μοναδικό. Τέλος, ο διανυσματικός χώρος  $\vec{\mathcal{E}}$  είναι ισόμορφος με τον  $\mathbb{R}$  και επομένως η διάστασή του ισούται με 1. Συνεπώς, η τριάδα  $(\mathcal{E}, \vec{\mathcal{E}}, +)$  είναι ένας ομοπαράλληλικός χώρος διάστασης 1.

**Παράδειγμα 1.4.** Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 1\}$$

και ορίζουμε την απεικόνιση

$$+ : \mathcal{P} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}, ((x, y), u) \longmapsto (x + u, y - u).$$

Θα δείξουμε ότι η τριάδα  $(\mathcal{P}, \mathbb{R}, +)$  είναι ένας ομοπαράλληλικός χώρος. Για κάθε  $(x, y) \in \mathcal{P}$  ισχύει:

$$(x, y) + 0 = (x + 0, y - 0) = (x, y).$$

Αν  $(x, y) \in \mathcal{P}$  και  $u, v \in \mathbb{R}$ , τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} ((x, y) + u) + v &= (x + u, y - u) + v, \\ &= ((x + u) + v, (y - u) - v), \\ &= (x + (u + v), y - (u + v)), \\ &= (x, y) + u + v. \end{aligned}$$

Επίσης, αν  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathcal{P}$ , τότε  $x_i + y_i = 1$  ( $i = 1, 2$ ) και επομένως  $y_i = 1 - x_i$  ( $i = 1, 2$ ). Θέτουμε  $u = x_2 - x_1$  και έχουμε  $x_2 = x_1 + u$ , απ' όπου έπεται

$$y_2 = 1 - x_2 = 1 - (x_1 + u) = y_1 - u.$$

ρα, παίρνουμε:

$$(x_1, y_1) + u = (x_1 + u, y_1 - u) = (x_2, y_2).$$

Αν  $u' \in \mathbb{R}$  είναι τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$(x_1, y_1) + u = (x_2, y_2) = (x_1, y_1) + u',$$

τότε έχουμε  $(x_1 + u, y_1 - u) = (x_1 + u', y_1 - u')$ , απ' όπου  $u = u'$ . ρα, η τριάδα  $(\mathcal{P}, \mathbb{R}, +)$  είναι ένας ομοπαράλληλικός χώρος διάστασης 1.



**Παράδειγμα 1.5.** Ας είναι το σύνολο

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 - z = 0\}.$$

Θεωρούμε την απεικόνιση

$$+ : \mathcal{P} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{P}, ((x, y, z), \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}) \longmapsto (x + u, y + v, (x + u)^2 + (y + v)^2).$$

Η τριάδα  $(\mathcal{P}, \mathbb{R}^2, +)$  είναι ένας ομοπαράλληλικός χώρος. Πράγματι, για κάθε  $(x, y, z) \in \mathcal{P}$  έχουμε:

$$(x, y, z) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (x + 0, y + 0, (x + 0)^2 + (y + 0)^2) = (x, y, x^2 + y^2) = (x, y, z).$$

Ας είναι  $(x, y, z) \in \mathcal{P}$  και  $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . Τότε, έχουμε:

$$\begin{aligned} \left( (x, y, z) + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= (x + u_1, y + u_2, (x + u_1)^2 + (y + u_2)^2) + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ &= ((x + u_1) + v_1, (y + u_2) + v_2, ((x + u_1) + v_1)^2 + ((y + u_2) + v_2)^2) \\ &= (x + (u_1 + v_1), y + (u_2 + v_2), (x + (u_1 + v_1))^2 + (y + (u_2 + v_2))^2) \\ &= (x, y, z) + \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Τέλος, ας είναι  $(x_i, y_i, z_i) \in \mathcal{P}$  ( $i = 1, 2$ ). Θέτουμε  $a = x_2 - x_1$  και  $b = y_2 - y_1$ . Τότε, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1, z_1) + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \\ (x_1 + a, y_1 + b, (x_1 + a)^2 + (y_1 + b)^2) &= (x_2, y_2, x_2^2 + y_2^2) = (x_2, y_2, z_2). \end{aligned}$$

Αν  $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  είναι ένα άλλο διάνυσμα τέτοιο, ώστε

$$(x_1, y_1, z_1) + \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = (x_2, y_2, z_2),$$

τότε

$$(x_1 + a', y_1 + b', (x_1 + a')^2 + (y_1 + b')^2) = (x_2, y_2, z_2),$$

απ' όπου  $a' = x_2 - x_1 = a$  και  $b' = y_2 - y_1 = b$ . Επομένως, το διάνυσμα  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  είναι μοναδικό. 'ρα, η τριάδα  $(\mathcal{P}, \mathbb{R}^2, +)$  είναι ένας ομοπαράλληλικός χώρος διάστασης 2.

**Παράδειγμα 1.6.** Ας είναι  $n$  θετικός ακέραιος. Θεωρούμε το σύνολο  $\mathbb{R}_n[x]$  το οποίο αποτελείται από όλα τα πολυώνυμα  $f(x)$  του  $\mathbb{R}[x]$  με  $\deg f \leq n$ . Το  $\mathbb{R}_n[x]$  εφοδιασμένο με τη συνήθη πρόσθεση πολυωνύμων και τον πολλαπλασιασμό πραγματικού αριθμού με πολυώνυμο είναι ένας  $\mathbb{R}$ -διανυσματικός χώρος διάστασης  $n + 1$ .

Συμβολίζουμε με  $\mathcal{P}_{n,1}$  και  $\mathcal{P}_{n,0}$  τα σύνολο των πολυωνύμων  $f(x) \in \mathbb{R}_n[x]$  με

$$\int_0^1 f(x) dx = 1 \quad \text{και} \quad \int_0^1 f(x) dx = 0,$$

αντίστοιχα. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το σύνολο  $\mathcal{P}_{n,0}$  είναι διανυσματικός υποχώρος του  $\mathbb{R}_n[x]$ . Αν  $f(x) \in \mathcal{P}_{n,1}$  και  $g(x) \in \mathcal{P}_{n,0}$ , τότε έχουμε

$$\int_0^1 (f(x) + g(x)) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 g(x) dx = 1 + 0 = 1.$$

Άρα, έχουμε την απεικόνιση

$$+ : \mathcal{P}_{n,1} \times \mathcal{P}_{n,0} \longrightarrow \mathcal{P}_{n,1}, (f(x), g(x)) \longmapsto f(x) + g(x).$$

Χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις ιδιότητες των πολυωνύμων επαληθεύουμε ότι η τριάδα  $(\mathcal{P}_{n,1}, \mathcal{P}_{n,0}, +)$  είναι ένας ομοπαράλληλικός χώρος.

Ας είναι  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  ένα πολυώνυμο του  $\mathbb{R}_n[x]$ . Τότε  $f(x) \in \mathcal{P}_{n,0}$  αν και μόνον αν ισχύει:

$$0 = \int_0^1 f(x) dx = a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0.$$

Ο χώρος των λύσεων της παραπάνω εξίσωσης έχει διάσταση  $n$  και επομένως  $\dim \mathcal{P}_{n,0} = n$ . Συνεπώς, η διάσταση του χώρου  $(\mathcal{P}_{n,1}, \mathcal{P}_{n,0}, +)$  είναι  $n$ .

Δεν πρέπει να συγχέουμε το σύμβολο της πρόσθεσης  $+$  στον διανυσματικό χώρο  $\mathcal{E}$  με το σύμβολο στο οποίο αντιστοιχεί ένα σημείο και ένα διάνυσμα  $\vec{s}$  ένα σημείο. Ας σημειωθεί ότι δεν έχει οριστεί πρόσθεση μεταξύ των σημείων του  $\mathcal{E}$ , ενώ για κάθε ζεύγος  $x, y \in \mathcal{E}$  έχουμε ορίσει ήδη τη διαφορά  $y - x$ .

**Πρόταση 1.2.** Ας είναι  $a, b, c, d \in \mathcal{E}$ . Ισχύουν τα εξής:

- (α)  $\vec{ab} + \vec{bc} = \vec{ac}$  (Ταντότητα του Chasles).
- (β)  $\vec{ab} = \vec{0} \Leftrightarrow a = b$ .
- (γ)  $\vec{ba} = -\vec{ab}$ .
- (δ)  $\vec{ab} = \vec{dc} \Leftrightarrow \vec{bc} = \vec{ad}$  (Νόμος του Παραλληλογράμμου).

Απόδειξη. (α) Έχουμε:

$$c = a + \vec{ac}, \quad b = a + \vec{ab}, \quad c = b + \vec{bc}.$$

Έτσι, προκύπτει:

$$c = b + \vec{bc} = (a + \vec{ab}) + \vec{bc} = a + (\vec{ab} + \vec{bc}).$$

Οπότε, από την ιδιότητα (A3), παίρνουμε  $\vec{ab} + \vec{bc} = \vec{ac}$ .

(β) Έχουμε  $a = a + \vec{aa}$  και από την ιδιότητα (A1) ισχύει  $a = a + \vec{0}$ . Έτσι, από την ιδιότητα (A3) έπεται  $\vec{aa} = \vec{0}$ . Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι  $\vec{ab} = \vec{0}$ . Επομένως, έχουμε  $b = a + \vec{ab} = a + \vec{0} = a$ .

(γ) Από τις (α) και (β) έχουμε:

$$\vec{ab} + \vec{ba} = \vec{aa} = \vec{0}.$$

Επομένως, ισχύει  $\vec{ba} = -\vec{ab}$ .

(δ) Από την (α) έχουμε:

$$\vec{ab} + \vec{bc} = \vec{ac} = \vec{ad} + \vec{dc}.$$

Έτσι, προκύπτει:

$$\vec{ab} = \vec{dc} \Leftrightarrow \vec{bc} = \vec{ad}.$$

□

**Παρατήρηση 1.1.** Ας είναι  $(\mathcal{E}, \vec{\mathcal{E}}, +)$  ένας ομοπαράλληλικός χώρος. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\Psi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \vec{\mathcal{E}}, (a, b) \longmapsto \vec{ab}.$$

Από την Πρόταση 1.2 έχουμε ότι για κάθε  $a, b, c \in \mathcal{E}$  ισχύει:

$$\Psi(a, b) + \Psi(b, c) = \Psi(a, c).$$

Επιπλέον, από την Πρόταση 1.1 έπεται ότι για κάθε  $a \in \mathcal{E}$ , η απεικόνιση

$$\Psi_a : \mathcal{E} \longrightarrow \vec{\mathcal{E}}, b \longmapsto \Psi(a, b)$$

είναι αμφίεση. Τέλος, για κάθε  $a \in \mathcal{E}$  και  $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}$  έχουμε  $a + \vec{u} = \Psi_a^{-1}(\vec{u})$ .

Στην επόμενη πρόταση θα δείξουμε ότι μία συνάρτηση  $\Psi$  με τις παραπάνω ιδιότητες ορίζει έναν ομοπαράλληλο χώρο.

**Πρόταση 1.3.** *Ας είναι  $\mathcal{E}$  ένα μη κενό σύνολο,  $\vec{\mathcal{E}}$  ένας  $\mathbb{R}$ -διανυσματικός χώρος και  $\Psi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \vec{\mathcal{E}}$  μία απεικόνιση με τις εξής ιδιότητες:*

(α)  $\Psi(a, b) + \Psi(b, c) = \Psi(a, c)$ , για κάθε  $a, b, c \in \mathcal{E}$ .

(β) Για κάθε  $a \in \mathcal{E}$ , η απεικόνιση

$$\Psi_a : \mathcal{E} \longrightarrow \vec{\mathcal{E}}, b \longmapsto \Psi(a, b)$$

είναι αμφίεση.

Επιπλέον, θεωρούμε την απεικόνιση

$$+ : \mathcal{E} \times \vec{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}, (a, \vec{u}) \longmapsto \Psi_a^{-1}(\vec{u}).$$

Τότε, η τριάδα  $(\mathcal{E}, \vec{\mathcal{E}}, +)$  είναι ένας ομοπαράλληλος χώρος.

*Απόδειξη.* Θα δείξουμε πρώτα την ιδιότητα (A1). Για κάθε  $a, c \in \mathcal{E}$  ισχύει:

$$\Psi(a, a) + \Psi(a, c) = \Psi(a, c).$$

Έτσι, παίρνουμε  $\Psi(a, a) = \vec{0}$  και επομένως  $\Psi_a(a) = \vec{0}$ , απ' όπου  $\Psi_a^{-1}(\vec{0}) = a$ . Οπότε, έχουμε:

$$a + \vec{0} = \Psi_a^{-1}(\vec{0}) = a.$$

Ήρα, η ιδιότητα (A1) αληθεύει.

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι για κάθε  $a \in \mathcal{E}$  και κάθε  $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}$  ισχύει:

$$a + (\vec{u} + \vec{v}) = (a + \vec{u}) + \vec{v},$$

ή ισοδύναμα

$$\Psi_a^{-1}(\vec{u} + \vec{v}) = \Psi_a^{-1}(\vec{u}) + \vec{v},$$

ή

$$\vec{u} + \vec{v} = \Psi_a(\Psi_a^{-1}(\vec{u}) + \vec{v}).$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \Psi_a(\Psi_a^{-1}(\vec{u}) + \vec{v}) &= \Psi(a, \Psi_a^{-1}(\vec{u}) + \vec{v}) \\ &= \Psi(a, \Psi_a^{-1}(\vec{u})) + \Psi(\Psi_a^{-1}(\vec{u}), \Psi_a^{-1}(\vec{u}) + \vec{v}) \\ &= \Psi_a(\Psi_a^{-1}(\vec{u})) + \Psi_{\Psi_a^{-1}(\vec{u})}(\Psi_a^{-1}(\vec{u}) + \vec{v}) \\ &= \Psi_a(\Psi_a^{-1}(\vec{u})) + \Psi_{\Psi_a^{-1}(\vec{u})}(\Psi_{\Phi_a^{-1}(\vec{u})}^{-1}(\vec{v})) \\ &= \vec{u} + \vec{v}. \end{aligned}$$

Επομένως, η ιδιότητα (A2) ισχύει.

Τέλος, θα δείξουμε ότι η ιδιότητα (A3) αληθεύει. Ας είναι  $a, b \in \mathcal{E}$ . Επειδή η απεικόνιση  $\Psi_a$  είναι αμφίεση, υπάρχει μοναδικό  $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}$  τέτοιο, ώστε  $\Psi_a^{-1}(\vec{u}) = b$  που ισοδυναμεί με  $a + \vec{u} = b$ . Ήρα, ισχύει και η ιδιότητα (A3). Συνεπώς, η τριάδα  $(\mathcal{E}, \vec{\mathcal{E}}, +)$  αποτελεί έναν ομοπαράλληλο χώρο.  $\square$

## 1.2 Βαρύκεντρα

Ας είναι  $(\mathcal{E}, \vec{\mathcal{E}}, +)$  ένας ομοπαράλληλικός χώρος.

**Πρόταση 1.4.** Ας είναι  $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{E}$  και  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  με  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ . Τότε, για κάθε  $a, b \in \mathcal{E}$ , ισχύει:

$$a + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{aa_i} = b + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{ba_i}.$$

*Απόδειξη.* Από την Πρόταση 1.2(α) έχουμε:

$$\begin{aligned} a + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{aa_i} &= a + \sum_{i=1}^n \lambda_i (\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ba_i}) \\ &= a + \left( \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \overrightarrow{ab} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{ba_i} \right) \\ &= a + \left( \overrightarrow{ab} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{ba_i} \right) \\ &= (a + \overrightarrow{ab}) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{ba_i} \\ &= b + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{ba_i}. \end{aligned}$$

□

Σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση έχουμε ότι το σημείο

$$g = a + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{aa_i}$$

είναι ανεξάρτητο από το σημείο  $a$  και εξαρτάται μόνον από τα σημεία  $a_i$  και τους αριθμούς  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Έτσι, το σημείο  $g$  θα συμβολίζεται με

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i.$$

**Ορισμός 1.3.** Κάθε ζεύγος  $(a, \lambda)$ , όπου  $a \in \mathcal{E}$  και  $\lambda \in \mathbb{R}$ , καλείται *βεβαρημένο σημείο* του  $\mathcal{E}$ . Ο αριθμός  $\lambda$  καλείται *βάρος* του σημείου  $a$ . *Βαρύκεντρο* ή *ομοπαράλληλικός συνδυασμός* των βεβαρημένων σημείων  $(a_i, \lambda_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ), με  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ , καλείται το σημείο  $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$ .

Ας είναι  $g$  το βαρύκεντρο των  $(a_1, \lambda_1), \dots, (a_n, \lambda_n)$ . Τότε, για κάθε  $a \in \mathcal{E}$  έχουμε:

$$\overrightarrow{ag} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{aa_i}.$$

Αν  $e \in \mathcal{E}$  είναι σημείο τέτοιο, ώστε για κάθε  $a \in \mathcal{E}$  να ισχύει

$$\overrightarrow{ae} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{aa_i},$$

τότε  $\vec{a}\vec{g} = \vec{a}\vec{e}$ . Έτσι, έχουμε

$$\vec{e}\vec{g} = \vec{e}\vec{a} + \vec{a}\vec{g} = \vec{e}\vec{a} + \vec{a}\vec{e} = \vec{e}\vec{e} = \vec{0},$$

απ' όπου  $g = e$ . Άρα, το βαρύκεντρο  $g$  των  $(a_1, \lambda_1), \dots, (a_n, \lambda_n)$  είναι το μοναδικό σημείο τέτοιο, ώστε για κάθε  $a \in \mathcal{E}$  να ισχύει:

$$\vec{a}\vec{g} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{a}\vec{a}_i.$$

Θέτοντας  $a = g$ , παίρνουμε:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{g}\vec{a}_i = \vec{0}.$$

Αντιστρόφως, αν ισχύει η παραπάνω ισότητα, τότε για κάθε  $a \in \mathcal{E}$  έχουμε

$$\vec{a}\vec{g} = \vec{a}\vec{g} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{g}\vec{a}_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i (\vec{a}\vec{g} + \vec{g}\vec{a}_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{a}\vec{a}_i.$$

Άρα, το βαρύκεντρο  $g$  είναι το μοναδικό σημείο τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{g}\vec{a}_i = \vec{0}.$$

Επίσης, αν  $\lambda_1 = 0$ , τότε το βαρύκεντρο  $g$  των  $(a_1, \lambda_1), \dots, (a_n, \lambda_n)$  ισούται με το βαρύκεντρο  $y$  των  $(a_2, \lambda_2), \dots, (a_n, \lambda_n)$ . Πράγματι, για τυχόν σημείο  $a \in \mathcal{E}$  έχουμε:

$$g = a + \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{a}\vec{a}_i = a + \sum_{i=2}^n \lambda_i \vec{a}\vec{a}_i = y.$$

**Πρόταση 1.5.** Ας είναι  $(a_1, \lambda_1), \dots, (a_n, \lambda_n)$  βεβαρημένα σημεία με  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$  και  $g$  το βαρύκεντρό τους. Αν  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k \neq 0$  και  $b_k$  είναι το βαρύκεντρο των  $(a_j, \lambda_j / (\lambda_1 + \dots + \lambda_k))$  ( $j = 1, \dots, k$ ) με  $2 \leq k \leq n-1$ , τότε έχουμε:

$$g = (\lambda_1 + \dots + \lambda_k) b_k + \lambda_{k+1} a_{k+1} + \dots + \lambda_n a_n.$$

*Απόδειξη.* Ας είναι  $a \in \mathcal{E}$ . Έχουμε:

$$\begin{aligned} g &= a + \sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{a}\vec{a}_i \\ &= a + (\lambda_1 + \dots + \lambda_k) \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k} \vec{a}\vec{a}_i + \sum_{i=k+1}^n \lambda_i \vec{a}\vec{a}_i \\ &= a + (\lambda_1 + \dots + \lambda_k) \vec{a}\vec{b}_k + \sum_{i=k+1}^n \lambda_i \vec{a}\vec{a}_i \\ &= (\lambda_1 + \dots + \lambda_k) b_k + \lambda_{k+1} a_{k+1} + \dots + \lambda_n a_n. \end{aligned}$$

□

**Πόρισμα 1.1.** Ο υπολογισμός του βαρυκέντρου  $n \geq 3$  βεβαρημένων σημείων είναι δυνατόν ν' αναχθεί στον υπολογισμό  $n-1$  βαρυκέντρων δύο σημείων.

*Απόδειξη.* Ας είναι  $(a_1, \lambda_1), \dots, (a_n, \lambda_n)$  βεβαρημένα σημεία του  $\mathcal{S}$  με  $n \geq 3$  και  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ . Συμβολίζουμε με  $g$  το βαρύκεντρό τους. Μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι  $\lambda_i \neq 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Αν  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$  και  $\lambda_1 + \lambda_3 = 0$ , τότε  $\lambda_2 = \lambda_3$  και επομένως  $\lambda_2 + \lambda_3 \neq 0$  που είναι άτοπο. Άρα  $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$  ή  $\lambda_1 + \lambda_3 \neq 0$  ή  $\lambda_2 + \lambda_3 \neq 0$ . Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι  $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ . Από την Πρόταση 1.5 έχουμε:

$$g = (\lambda_1 + \lambda_2) \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} a_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} a_2 \right) + \sum_{i=3}^n \lambda_i a_i.$$

Υπολογίζουμε το βαρύκεντρο

$$b_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} a_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} a_2$$

και έχουμε:

$$g = (\lambda_1 + \lambda_2) b_2 + \sum_{i=3}^n \lambda_i a_i.$$

Έτσι, με τον υπολογισμό του βαρυκέντρου  $b_2$  γράψαμε το  $g$  ως βαρύκεντρο  $n - 1$  σημείων. Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο, και υπολογίζοντας  $n - 1$  βαρύκεντρα δύο σημείων, υπολογίζουμε το  $g$ .  $\square$

Η διαδικασία απόδειξης του Πορίσματος 1.1 δίνεται πιο συστηματικά στον παρακάτω αλγόριθμο:

**Αλγόριθμος 1.1.** Υπολογισμός Βαρυκέντρου.

*Είσοδος:* Βεβαρημένα σημεία  $(a_1, \lambda_1), \dots, (a_n, \lambda_n)$  ( $n \geq 2$ ) με  $\lambda_i \neq 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) και  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ .

*Έξοδος:* Το βαρύκεντρο  $g$  των σημείων  $(a_1, \lambda_1), \dots, (a_n, \lambda_n)$ .

1. Θέτουμε  $a_i^{(0)} = a_i, \lambda_i^{(0)} = \lambda_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

2. Για  $j = 0, \dots, n - 1$ , κάνουμε τα εξής:

(α) Βρίσκουμε δείκτες  $\sigma(j)$  και  $\tau(j)$  με  $1 \leq \sigma(j) < \tau(j) \leq n - j$  και  $\lambda_{\sigma(j)}^{(j)} + \lambda_{\tau(j)}^{(j)} \neq 0$ .

(β) Υπολογίζουμε το βαρύκεντρο

$$b_j = \frac{\lambda_{\sigma(j)}^{(j)}}{\lambda_{\sigma(j)}^{(j)} + \lambda_{\tau(j)}^{(j)}} a_{\sigma(j)}^{(j)} + \frac{\lambda_{\tau(j)}^{(j)}}{\lambda_{\sigma(j)}^{(j)} + \lambda_{\tau(j)}^{(j)}} a_{\tau(j)}^{(j)}.$$

(γ) Θέτουμε  $a_l^{(j+1)} = a_l^{(j)}$  ( $l = 1, \dots, \tau(j) - 1, l \neq \sigma(j)$ ),  $a_{\sigma(j)}^{(j+1)} = b_j$  και  $a_l^{(j+1)} = a_{l+1}^{(j)}$  ( $l = \tau(j), \dots, n - j - 1$ ).

3. Εξάγουμε  $g = b_{n-2}$ .

**Παράδειγμα 1.7.** Θεωρούμε τον ομοπαράλληλο χώρο  $(\mathcal{P}, \mathbb{R}, +)$  του Παραδείγματος 1.4. Θα υπολογίσουμε το βαρύκεντρο  $g$  των βεβαρημένων σημείων  $(a_1, 1/4), (a_2, 1/4), (a_3, 1/2)$ , όπου  $a_1 = (0, 1), a_2 = (3, -2)$  και  $a_3 = (2, -1)$ .

Σύμφωνα με τον Αλγόριθμο 1.1, θα υπολογίσουμε πρώτα το βαρύκεντρο

$$b_0 = \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2} a_2$$

και κατόπιν το βαρύκεντρο

$$g = \frac{1}{2} b_0 + \frac{1}{2} a_3.$$

Θεωρούμε το σημείο  $a = (1, 0)$  και έχουμε:

$$\begin{aligned} b_0 &= a + \frac{1}{2} \overrightarrow{aa_1} + \frac{1}{2} \overrightarrow{aa_2} \\ &= (1, 0) + \frac{1}{2} \overrightarrow{(1, 0)(0, 1)} + \frac{1}{2} \overrightarrow{(1, 0)(3, -2)} \\ &= (1, 0) + \left( -\frac{1}{2} + 1 \right) \\ &= (1, 0) + \frac{1}{2} \\ &= \left( \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, έχουμε:

$$\begin{aligned} g &= a + \frac{1}{2} \overrightarrow{ab_0} + \frac{1}{2} \overrightarrow{aa_3} \\ &= (1, 0) + \frac{1}{2} \overrightarrow{(1, 0) \left( \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right)} + \frac{1}{2} \overrightarrow{(1, 0)(2, -1)} \\ &= (1, 0) + \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) \\ &= (1, 0) + \frac{3}{4} \\ &= \left( \frac{7}{4}, -\frac{3}{4} \right). \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 1.8.** Ας είναι  $(P_1, \lambda_1), \dots, (P_k, \lambda_k)$  βεβαρημένα σημεία του  $A^n$  με  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ . Θέτουμε  $O = (0, \dots, 0) \in A^n$ . Το βαρύκεντρο των παραπάνω σημείων είναι:

$$x = O + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OP_i}.$$

Θέτουμε  $P_i = (p_{i1}, \dots, p_{in})$  ( $i = 1, \dots, k$ ) και έχουμε

$$\overrightarrow{OP_i} = \begin{pmatrix} p_{i1} \\ \vdots \\ p_{in} \end{pmatrix}.$$

Έτσι, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} x &= (0, \dots, 0) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \begin{pmatrix} p_{i1} \\ \vdots \\ p_{in} \end{pmatrix} \\ &= (0, \dots, 0) + \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k \lambda_i p_{i1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^k \lambda_i p_{in} \end{pmatrix} \\ &= \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i p_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^k \lambda_i p_{in} \right). \end{aligned}$$

**Ορισμός 1.4.** Ας είναι  $a_0, \dots, a_n \in \mathcal{E}$ . Καλούμε *κυρτό συνδυασμό* των  $a_0, \dots, a_n$  κάθε ομοπαράλληλο συνδυασμό της μορφής  $\lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_n a_n$ , όπου  $\lambda_i \geq 0$  ( $i = 0, \dots, n$ ) και  $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1$ . Το σύνολο όλων των κυρτών συνδυασμών των  $a_0, \dots, a_n$  καλείται *κυρτό κάλυμμα* των  $a_0, \dots, a_n$ .

**Παράδειγμα 1.9.** Αν  $a_0, a_1 \in \mathcal{E}$  με  $a_0 \neq a_1$ , τότε το κυρτό κάλυμμα των  $a_0, a_1$  είναι το σύνολο

$$[a_0 a_1] = \{\lambda a_0 + (1 - \lambda)a_1 / \lambda \in [0, 1]\}.$$

**Παράδειγμα 1.10.** Αν  $a_0, a_1, a_2 \in \mathcal{E}$ , τότε το κυρτό κάλυμμα των  $a_0, a_1, a_2$  είναι το σύνολο

$$T(a_0, a_1, a_2) = \{\lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 / \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \text{ και } \lambda_i \geq 0\}.$$

Αν  $\mathcal{E} = A^2$  και τα διανύσματα  $\overrightarrow{a_0 a_1}$  και  $\overrightarrow{a_0 a_2}$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε το σύνολο αυτό παριστάνει ένα τρίγωνο με το εσωτερικό του.

### 1.3 Ομοπαράλληλοι Υποχώροι

Ας είναι  $(\mathcal{E}, \vec{\mathcal{E}}, +)$  ένας ομοπαράλληλος χώρος και  $\mathcal{V}$  ένα μη κενό υποσύνολο του  $\mathcal{E}$ .

**Ορισμός 1.5.** Το  $\mathcal{V}$  καλείται *ομοπαράλληλος υποχώρος* του  $\mathcal{E}$ , αν για κάθε ζεύγος βεβαρημένων σημείων  $(a, \lambda), (b, \mu)$  του  $\mathcal{V}$  με  $\lambda + \mu = 1$ , το βαρύκεντρό τους  $\lambda a + \mu b$  ανήκει στο  $\mathcal{V}$ .

**Πρόταση 1.6.** Ας είναι  $\mathcal{V}$  ένας ομοπαράλληλος υποχώρος του  $(\mathcal{E}, \vec{\mathcal{E}}, +)$ . Αν  $(a_i, \lambda_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) είναι βεβαρημένα σημεία του  $\mathcal{V}$  με  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ , τότε το βαρύκεντρό τους  $g$  ανήκει στο  $\mathcal{V}$ .

*Απόδειξη.* Μπορούμε να υποθέσουμε, δίχως βλάβη της γενικότητας, ότι  $k \geq 3$  και  $\lambda_i \neq 0$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Ο υπολογισμός του βαρυκέντρου  $g$  επιτυγχάνεται, σύμφωνα με τον Αλγόριθμο 1.1, με τον υπολογισμό των βαρυκέντρων  $b_j$  των σημείων  $(a_{\sigma(j)}^{(j)}, \lambda_{\sigma(j)}^{(j)} / (\lambda_{\sigma(j)}^{(j)} + \lambda_{\tau(j)}^{(j)}))$  και  $(a_{\tau(j)}^{(j)}, \lambda_{\tau(j)}^{(j)} / (\lambda_{\sigma(j)}^{(j)} + \lambda_{\tau(j)}^{(j)}))$  ( $j = 0, \dots, n-2$ ). Καθώς τα σημεία  $a_{\sigma(0)}^{(0)}$  και  $a_{\tau(0)}^{(0)}$  ανήκουν στο  $\mathcal{V}$ , το βαρύκεντρό τους  $b_0$  ανήκει επίσης στο  $\mathcal{V}$ . Ας υποθέσουμε ότι  $b_j \in \mathcal{V}$ . Τότε, τα σημεία  $a_{\sigma(j+1)}^{(j+1)}$  και  $a_{\tau(j+1)}^{(j+1)}$  ανήκουν στο  $\mathcal{V}$  και κατά συνέπεια  $b_{j+1} \in \mathcal{V}$ . Άρα, για κάθε  $j = 0, \dots, n-2$ , έχουμε  $b_j \in \mathcal{V}$  και επομένως έχουμε  $g = b_{n-2} \in \mathcal{V}$ .  $\square$

Συμβολίζουμε με  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  το σύνολο των  $m \times n$ -πινάκων με στοιχεία από το  $\mathbb{R}$ .

**Παράδειγμα 1.11.** Ας είναι  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  και  $c \in \mathbb{R}^m$ . Υποθέτουμε ότι το σύνολο

$$\mathcal{U} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n / A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = c\}$$

είναι μη κενό. Θα δείξουμε ότι το  $\mathcal{U}$  είναι ένας ομοπαράλληλος υποχώρος του  $\mathbb{A}^n$ . Ας είναι  $(p, \lambda)$  και  $(q, \mu)$  ένα ζεύγος βεβαρημένων σημείων του  $\mathcal{U}$  με  $\lambda + \mu = 1$ . Θέτουμε  $p = (p_1, \dots, p_n)$  και  $q = (q_1, \dots, q_n)$ . Σύμφωνα με το Παράδειγμα 1.8, το βαρύκεντρο των  $(p, \lambda)$  και  $(q, \mu)$  είναι το σημείο

$$w = (\lambda p_1 + \mu q_1, \dots, \lambda p_n + \mu q_n).$$

Έχουμε:

$$A \begin{pmatrix} \lambda p_1 + \mu q_1 \\ \vdots \\ \lambda p_n + \mu q_n \end{pmatrix} = \lambda A \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} + \mu A \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \lambda c + \mu c = (\lambda + \mu)c = c.$$

Άρα,  $w \in \mathcal{U}$  και κατά συνέπεια το  $\mathcal{U}$  είναι ένας ομοπαράλληλος υποχώρος.



Ας είναι  $a \in \mathcal{E}$  και  $\vec{\mathcal{V}}$  ένας διανυσματικός υποχώρος του  $\mathcal{E}$ . Θεωρούμε το σύνολο

$$a + \vec{\mathcal{V}} = \{a + \vec{v} / \vec{v} \in \vec{\mathcal{V}}\}.$$

**Πρόταση 1.7.** Το σύνολο  $a + \vec{\mathcal{V}}$  είναι ένας ομοπαράλληλικός υποχώρος του  $(\mathcal{E}, \vec{\mathcal{E}}, +)$ .

*Απόδειξη.* Ας είναι  $(a + \vec{u}, \lambda)$  και  $(a + \vec{v}, \mu)$  δύο βεβαρημένα σημεία του  $a + \vec{\mathcal{V}}$  με  $\lambda + \mu = 1$ . Το βαρύκεντρο αυτών των σημείων είναι:

$$x = a + \lambda a(\overrightarrow{a + \vec{u}}) + \mu a(\overrightarrow{a + \vec{v}}) = a + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}.$$

Έχουμε  $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{V}}$  και το  $\vec{\mathcal{V}}$  είναι διανυσματικός υποχώρος του  $\mathcal{E}$ . Επομένως,  $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in \vec{\mathcal{V}}$  και κατά συνέπεια  $x \in a + \vec{\mathcal{V}}$ . Άρα, το σύνολο  $a + \vec{\mathcal{V}}$  είναι ένας ομοπαράλληλικός υποχώρος του  $(\mathcal{E}, \vec{\mathcal{E}}, +)$ .  $\square$

**Πρόταση 1.8.** Ας είναι  $\mathcal{V}$  ομοπαράλληλικός υποχώρος του  $\mathcal{E}$ . Τότε, για κάθε  $a \in \mathcal{V}$ , το σύνολο

$$\vec{\mathcal{V}}_a = \{\overrightarrow{ax} / x \in \mathcal{V}\}$$

είναι διανυσματικός υποχώρος του  $\mathcal{E}$  και ισχύει  $\mathcal{V} = a + \vec{\mathcal{V}}_a$ . Επίσης, το σύνολο

$$\vec{\mathcal{V}} = \{\overrightarrow{xy} / x, y \in \mathcal{V}\}$$

είναι διανυσματικός υποχώρος του  $\mathcal{E}$  και για κάθε  $a \in \mathcal{V}$  ισχύει  $\vec{\mathcal{V}}_a = \vec{\mathcal{V}}$ . Επομένως, για κάθε  $a \in \mathcal{V}$  ισχύει  $\mathcal{V} = a + \vec{\mathcal{V}}$ .

*Απόδειξη.* Ας είναι  $\overrightarrow{aa_1}, \overrightarrow{aa_2} \in \vec{\mathcal{V}}_a$  και  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Θα δείξουμε ότι ισχύει  $\lambda_1 \overrightarrow{aa_1} + \lambda_2 \overrightarrow{aa_2} \in \vec{\mathcal{V}}_a$ . Συμβολίζουμε με  $g$  το βαρύκεντρο των βεβαρημένων σημείων  $(a_1, \lambda_1)$ ,  $(a_2, \lambda_2)$  και  $(a, 1 - \lambda_1 - \lambda_2)$ . Έχουμε:

$$g = a + \lambda_1 \overrightarrow{aa_1} + \lambda_2 \overrightarrow{aa_2} + (1 - \lambda_1 - \lambda_2) \overrightarrow{aa} = a + \lambda_1 \overrightarrow{aa_1} + \lambda_2 \overrightarrow{aa_2}.$$

Έτσι, παίρνουμε:

$$\overrightarrow{ag} = \lambda_1 \overrightarrow{aa_1} + \lambda_2 \overrightarrow{aa_2}.$$

Καθώς το  $\mathcal{V}$  είναι ομοπαράλληλικός υποχώρος του  $\mathcal{E}$  και  $a, a_1, a_2 \in \mathcal{V}$ , έχουμε  $g \in \mathcal{V}$  και επομένως  $\overrightarrow{ag} \in \vec{\mathcal{V}}_a$ . Επομένως,  $\lambda_1 \overrightarrow{aa_1} + \lambda_2 \overrightarrow{aa_2} \in \vec{\mathcal{V}}_a$  και κατά συνέπεια το σύνολο  $\vec{\mathcal{V}}_a$  είναι διανυσματικός υποχώρος του  $\mathcal{E}$ .

Για κάθε  $x \in \mathcal{V}$  έχουμε  $x = a + \overrightarrow{ax}$  και επομένως  $x \in a + \vec{\mathcal{V}}_a$ . Αν  $x \in a + \vec{\mathcal{V}}_a$ , τότε  $x = a + \overrightarrow{ay}$  με  $y \in \mathcal{V}$ , και επομένως  $x = y \in \mathcal{V}$ . Συνεπώς, ισχύει  $\mathcal{V} = a + \vec{\mathcal{V}}_a$ .

Είναι προφανές ότι  $\vec{\mathcal{V}}_a \subseteq \vec{\mathcal{V}}$ . Αντιστρόφως, για κάθε  $x, y \in \mathcal{V}$ , έχουμε:

$$\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{xa} + \overrightarrow{ay} = \overrightarrow{ay} - \overrightarrow{ax}.$$

Έτσι, καθώς το  $\vec{\mathcal{V}}_a$  είναι διανυσματικός υποχώρος, έχουμε  $\overrightarrow{xy} \in \vec{\mathcal{V}}_a$  και επομένως  $\vec{\mathcal{V}} \subseteq \vec{\mathcal{V}}_a$ . Άρα, ισχύει  $\vec{\mathcal{V}} = \vec{\mathcal{V}}_a$ .  $\square$

Ας είναι  $a \in \mathcal{V}$  και  $\vec{u} \in \vec{\mathcal{V}}$ . Τότε, υπάρχει  $b \in \mathcal{V}$  τέτοιο, ώστε  $\vec{u} = \overrightarrow{ab}$ . Άρα, έχουμε  $a + \vec{u} = a + \overrightarrow{ab} = b$  και επομένως  $a + \vec{u} \in \mathcal{V}$ . Έτσι, βλέπουμε ότι ο περιορισμός της απεικόνισης  $+$ :  $\mathcal{E} \times \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{E}$  επί του  $\mathcal{V} \times \vec{\mathcal{V}}$  δίνει μία απεικόνιση  $+$ :  $\mathcal{V} \times \vec{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{V}$ . Άρα, η τριάδα  $(\mathcal{V}, \vec{\mathcal{V}}, +)$  είναι ένας ομοπαράλληλικός χώρος.

Από την άλλη πλευρά, ας είναι  $(\mathcal{W}, \vec{\mathcal{W}}, \tilde{+})$  ένας ομοπαράλληλικός χώρος τέτοιος, ώστε  $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{E}$ ,  $\vec{\mathcal{W}}$  είναι υποχώρος του  $\vec{\mathcal{E}}$  και η απεικόνιση  $\tilde{+}$  είναι ο περιορισμός της  $+$  επί του  $\mathcal{W} \times \vec{\mathcal{W}}$ . Τότε, για κάθε ζεύγος βεβαρημένων σημείων  $(a, \lambda)$ ,  $(b, \mu)$  του  $\mathcal{W}$  με  $\lambda + \mu = 1$ , το βαρύκεντρό τους  $\lambda a + \mu b$  ανήκει στο  $\mathcal{W}$ , και κατά συνέπεια το σύνολο  $\mathcal{W}$  είναι ένας ομοπαράλληλικός υποχώρος του  $\mathcal{E}$ .

**Παράδειγμα 1.12.** Στο Παράδειγμα 1.11 είδαμε ότι αν το σύνολο

$$\mathcal{U} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n / A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = c\}$$

είναι μη κενό, τότε είναι ένας ομοπαράλληλικός υποχώρος του  $\mathbb{A}^n$ . Ο διανυσματικός υποχώρος  $\vec{\mathcal{U}}$  αποτελείται από τα διανύσματα  $\vec{xy}$ , όπου  $x, y \in \mathcal{U}$ .

Αν  $x = (x_1, \dots, x_n)$  και  $y = (y_1, \dots, y_n)$  είναι σημεία του  $\mathcal{U}$ , τότε

$$\vec{xy} = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{pmatrix}$$

και επομένως έχουμε:

$$A \vec{xy} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = c - c = 0.$$

Αντιστρόφως, ας είναι  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  με  $A\vec{v} = \vec{0}$ . Αν  $x \in \mathcal{U}$ , τότε το στοιχείο  $y = x + \vec{v}$  ανήκει στο  $\mathcal{U}$  και επομένως  $\vec{v} = \vec{xy}$ . Συνεπώς, έχουμε  $\vec{v} \in \vec{\mathcal{U}}$ . Έτσι, βλέπουμε ότι ο διανυσματικός υποχώρος  $\vec{\mathcal{U}}$  είναι το σύνολο των λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος  $Ax = \vec{0}$ .

**Παράδειγμα 1.13.** Θα δείξουμε ότι κάθε ομοπαράλληλικός υποχώρος του  $\mathbb{A}^n$  έχει τη μορφή που είδαμε στο Παράδειγμα 1.11. Ας είναι λοιπόν  $\mathcal{V}$  ένας ομοπαράλληλικός υποχώρος του  $\mathbb{A}^n$  διάστασης  $k$  και  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$  μία βάση του  $\vec{\mathcal{V}}$ . Η βάση αυτή επεκτείνεται, με την προσθήκη κατάλληλων διανυσμάτων του  $\mathbb{R}^n$ , σε μία βάση  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{n-k}\}$  του  $\mathbb{R}^n$ . Υπάρχει γραμμική απεικόνιση  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  τέτοια, ώστε  $f(\vec{v}_i) = \vec{0}$  ( $i = 1, \dots, k$ ) και  $f(\vec{w}_j) = \vec{z}_j \neq \vec{0}$  ( $j = 1, \dots, n - k$ ). Έτσι, έχουμε  $\vec{\mathcal{V}} = \text{Ker } f$  (όπου με  $\text{Ker } f$  συμβολίζεται ο πυρήνας της  $f$ ). Από την άλλη πλευρά, υπάρχει  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ , ώστε να ισχύει  $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ , για κάθε  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ . Επομένως, έχουμε:

$$\vec{\mathcal{V}} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n / A\vec{x} = \vec{0}\}.$$

Ας είναι τώρα  $v \in \mathcal{V}$ . Τότε, έχουμε  $\mathcal{V} = v + \vec{\mathcal{V}}$  και  $A\vec{v} = \vec{c}$ . Έτσι, παίρνουμε ότι ο  $\mathcal{V}$  είναι το σύνολο των λύσεων του γραμμικού συστήματος  $Ax = \vec{c}$ .

**Ορισμός 1.6.** Ας είναι  $\mathcal{V}$  ομοπαράλληλικός υποχώρος του  $\mathcal{E}$ . Ο διανυσματικός χώρος  $\vec{\mathcal{V}}$  καλείται *κατεύθυνση* του  $\mathcal{V}$ . Δύο ομοπαράλληλικοί υποχώροι του  $\mathcal{E}$  καλούνται *παράλληλοι*, αν έχουν την ίδια κατεύθυνση.

Συνεπώς, δύο ομοπαράλληλικοί υποχώροι  $\mathcal{U} = a + \vec{\mathcal{U}}$  και  $\mathcal{V} = b + \vec{\mathcal{V}}$  του  $\mathcal{E}$  είναι παράλληλοι, αν και μόνον αν, ισχύει  $\vec{\mathcal{U}} = \vec{\mathcal{V}}$ . Σ' αυτή την περίπτωση, αν  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ , τότε  $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ . Πράγματι, έχουμε  $a = b + \vec{v}$ , όπου  $\vec{v} \in \vec{\mathcal{V}}$ , και επομένως  $b = a + (-\vec{v})$ . Καθώς  $\vec{\mathcal{U}} = \vec{\mathcal{V}}$ , έχουμε  $b \in \mathcal{U}$  και κατά συνέπεια  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ . Άρα, ισχύει  $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ .

**Παράδειγμα 1.14.** Ας υποθέσουμε ότι  $\mathcal{U} = a + \vec{W}$  και  $\mathcal{V} = b + \vec{W}$  είναι παράλληλοι ομοπαράλληλικοί υποχώροι του  $\mathcal{E}$  με  $\mathcal{U} \neq \mathcal{V}$ . Άρα, σύμφωνα με τα παραπάνω, έχουμε  $\mathcal{V} \not\subseteq \mathcal{U}$  και  $\mathcal{U} \not\subseteq \mathcal{V}$ . Αν  $x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ , τότε  $x = a + \vec{u} = b + \vec{v}$ , με  $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{W}$ . Έτσι, έχουμε  $a = b + (\vec{v} - \vec{u})$  με  $\vec{v} - \vec{u} \in \vec{W}$ . Άρα  $a \in \mathcal{V}$  και επομένως  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$  που είναι άτοπο. Συνεπώς, ισχύει  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ .

**Ορισμός 1.7.** Καλούμε *διάσταση* του ομοπαράλληλικού υποχώρου  $\mathcal{V}$  τη διάστασή του ως ομοπαράλληλικού χώρου, δηλαδή τη διάσταση του  $\vec{\mathcal{V}}$ , και τη συμβολίζουμε με  $\dim \mathcal{V}$ . Αν  $\dim \mathcal{V} = 1$ , τότε ο  $\mathcal{V}$  καλείται *ευθεία*, ενώ αν  $\dim \mathcal{V} = 2$ , τότε ο  $\mathcal{V}$  καλείται *επίπεδο*. Επίσης, αν  $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{E} - 1$ , τότε ο  $\mathcal{V}$  καλείται *υπερεπίπεδο*.

Αν  $\mathcal{V}$  και  $\mathcal{W}$  είναι ομοπαράλληλοι υποχώροι του  $\mathcal{E}$  με  $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$ , τότε  $\dim \mathcal{V} < \dim \mathcal{W}$ . Πράγματι, θεωρούμε  $a \in \mathcal{V}$  και έχουμε  $\mathcal{V} = a + \vec{\mathcal{V}}$ ,  $\mathcal{W} = a + \vec{\mathcal{W}}$  και  $\vec{\mathcal{V}} \subset \vec{\mathcal{W}}$ . Οπότε, ισχύει  $\dim \vec{\mathcal{V}} < \dim \vec{\mathcal{W}}$  και επομένως  $\dim \mathcal{V} < \dim \mathcal{W}$ .

**Παράδειγμα 1.15.** Ας υποθέσουμε ότι  $\mathcal{V}$  είναι ένας ομοπαράλληλος υποχώρος του  $\mathcal{E}$  διάστασης 0. Τότε έχουμε  $\mathcal{V} = a + \vec{\mathcal{V}}$ , όπου  $a \in \mathcal{V}$ , και  $\dim \vec{\mathcal{V}} = 0$ . Άρα, ισχύει  $\vec{\mathcal{V}} = \{\vec{0}\}$ , απ' όπου έπεται  $\mathcal{V} = \{a\}$ . Αντιστρόφως, αν  $a \in \mathcal{V}$ , τότε έχουμε  $\{a\} = a + \{\vec{0}\}$  και επομένως το μονοσύνολο  $\{a\}$  είναι ομοπαράλληλος υποχώρος του  $\mathcal{E}$  διάστασης 0. Συνεπώς, οι ομοπαράλληλοι υποχώροι του  $\mathcal{E}$  διάστασης 0 είναι όλα τα μονοσύνολα  $\{a\}$ , με  $a \in \mathcal{E}$ .

**Παράδειγμα 1.16.** Ας είναι δύο διαφορετικά σημεία  $a$  και  $b$  του  $\mathcal{E}$ . Τότε υπάρχει μία μοναδική ευθεία που τα περιέχει ή όπως λέμε διέρχεται από αυτά. Πράγματι, καθώς  $a \neq b$ , έχουμε  $\vec{ab} \neq \vec{0}$  και επομένως ο διανυσματικός υποχώρος  $\langle \vec{ab} \rangle$  που παράγεται από το  $\vec{ab}$  έχει διάσταση 1. 'ρα, το σύνολο  $\mathcal{L}_{a,b} = a + \langle \vec{ab} \rangle$  είναι μία ευθεία του  $\mathcal{E}$  το οποίο περιέχει τα  $a$  και  $b$ . Αν  $M$  είναι μία άλλη ευθεία που περιέχει τα  $a$  και  $b$ , τότε  $\vec{ab} \in \vec{M}$ . Καθώς  $\dim \vec{M} = 1$ , έπεται  $\vec{M} = \langle \vec{ab} \rangle$  και επομένως  $M = a + \vec{M} = \mathcal{L}_{a,b}$ .

**Παράδειγμα 1.17.** Ας είναι  $\dim \mathcal{E} = 2$  και  $L_1, L_2$  δύο διαφορετικές ευθείες του  $\mathcal{E}$ . Αν οι  $L_1$  και  $L_2$  είναι παράλληλες, τότε, από το Παράδειγμα 1.14 έχουμε  $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ . Ας υποθέσουμε ότι οι ευθείες  $L_1$  και  $L_2$  δεν είναι παράλληλες. Τότε,  $L_i = a_i + \langle \vec{v}_i \rangle$  ( $i = 1, 2$ ) και τα διανύσματα  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Άρα, τα  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  αποτελούν μία βάση του  $\vec{\mathcal{E}}$  και επομένως υπάρχουν  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$  τέτοια, ώστε  $a_1 - a_2 = k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2$ . Έτσι, έχουμε  $a_1 + (-k_1 \vec{v}_1) = a_2 + k_2 \vec{v}_2$  με  $a_1 + (-k_1 \vec{v}_1) \in L_1$  και  $a_2 + k_2 \vec{v}_2 \in L_2$ . Συνεπώς, οι ευθείες  $L_1$  και  $L_2$  έχουν ένα κοινό σημείο. Αν οι  $L_1$  και  $L_2$  έχουν τουλάχιστον δύο κοινά σημεία, τότε, σύμφωνα με το Παράδειγμα 1.16, ταυτίζονται, πράγμα που δεν συμβαίνει. Άρα, δύο διαφορετικές ευθείες είναι είτε παράλληλες και δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, είτε έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

**Παράδειγμα 1.18.** Από τα Παραδείγματα 1.11 και 1.13 έπεται ότι αν  $H$  είναι ένα υπερεπίπεδο του  $\mathbb{A}^n$ , τότε  $H$  είναι το σύνολο των λύσεων ενός γραμμικού συστήματος  $Ax = \vec{c}$ . Καθώς  $\dim \vec{H} = n - 1$ , έχουμε ότι το  $H$  είναι το σύνολο των λύσεων μίας γραμμικής εξίσωσης  $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b$ .

**Πρόταση 1.9.** Ας είναι  $a \in \mathcal{E}$  και  $\mathcal{V}$  ένας ομοπαράλληλος υποχώρος του  $\mathcal{E}$ . Τότε, υπάρχει μοναδικός ομοπαράλληλος υποχώρος του  $\mathcal{E}$  ο οποίος περιέχει το  $a$  και είναι παράλληλος με τον  $\mathcal{V}$ .

*Απόδειξη.* Θέτουμε  $\mathcal{U} = a + \vec{\mathcal{V}}$ . Θεωρούμε τον ομοπαράλληλο υποχώρο  $\mathcal{U} = a + \vec{\mathcal{V}}$ . Καθώς  $\vec{\mathcal{U}} = \vec{\mathcal{V}}$ , ο χώρος  $\mathcal{U}$  είναι παράλληλος με τον  $\mathcal{V}$  και έχουμε  $a \in \mathcal{U}$ . Από την άλλη πλευρά, ας υποθέσουμε ότι  $\mathcal{W}$  είναι ένας ομοπαράλληλος υποχώρος του  $\mathcal{E}$  ο οποίος περιέχει το  $a$  και είναι παράλληλος με τον  $\mathcal{V}$ . Τότε,  $\mathcal{W} = a + \vec{\mathcal{V}} = \mathcal{U}$ .  $\square$

**Πόρισμα 1.2.** Ας είναι  $a \in \mathcal{E}$  και  $\mathcal{L}$  μία ευθεία του  $\mathcal{E}$ . Τότε υπάρχει μία μοναδική ευθεία  $M$  που διέρχεται από το  $a$  και είναι παράλληλη προς την  $\mathcal{L}$ .

**Ορισμός 1.8.** Ας είναι  $a, b, c$  τρία διαφορετικά σημεία του  $\mathcal{E}$ . Τα σημεία  $a, b, c$  καλούνται *συνευθειακά*, αν ανήκουν στην ίδια ευθεία του  $\mathcal{E}$ .

**Παράδειγμα 1.19.** Ας είναι  $a, b, c$  τρία διαφορετικά μη συνευθειακά σημεία του  $\mathcal{E}$ . Τότε υπάρχει ένα μοναδικό επίπεδο του  $\mathcal{E}$  που περιέχει τα  $a, b, c$ . Πράγματι, επειδή τα σημεία  $a, b, c$  είναι μη συνευθειακά, τα διανύσματα  $\vec{ab}$  και  $\vec{ac}$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και επομένως ο διανυσματικός υποχώρος  $\langle \vec{ab}, \vec{ac} \rangle$  που παράγεται από αυτά έχει διάσταση 2. Συνεπώς, το σύνολο  $\mathcal{P}_{a,b,c} = a + \langle \vec{ab}, \vec{ac} \rangle$  είναι ένα επίπεδο του  $\mathcal{E}$  το οποίο περιέχει τα  $a, b, c$ . Αν υπάρχει κάποιο άλλο επίπεδο  $\mathcal{F}$ , με  $a, b, c \in \mathcal{F}$ , τότε  $\mathcal{F} = a + \vec{\mathcal{F}}$  και  $\vec{ab}, \vec{ac} \in \vec{\mathcal{F}}$ . Καθώς τα  $\vec{ab}$  και  $\vec{ac}$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και  $\dim \vec{\mathcal{F}} = 2$ , προκύπτει  $\vec{\mathcal{F}} = \langle \vec{ab}, \vec{ac} \rangle$ . 'ρα  $\mathcal{F} = \mathcal{P}_{a,b,c}$ .

**Πρόταση 1.10.** Ας είναι  $a, b, c$  τρία διαφορετικά σημεία του  $\mathcal{E}$ . Τα  $a, b, c$  είναι συνευθειακά, αν και μόνον αν, τα διανύσματα  $\vec{ab}$  και  $\vec{ac}$  είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

*Απόδειξη.* Ας είναι  $\mathcal{L} = u + \vec{\mathcal{L}}$  μία ευθεία του  $\mathcal{E}$  και  $a, b, c \in \mathcal{L}$ . Καθώς  $a, b, c \in \mathcal{L}$ , έχουμε  $\vec{ab}, \vec{ac} \in \vec{\mathcal{L}}$ . Επίσης, επειδή  $a \neq b$  και  $a \neq c$ , ισχύει  $\vec{ab} \neq 0$  και  $\vec{ac} \neq 0$ . Καθώς  $\dim \vec{\mathcal{L}} = 1$ , τα διανύσματα  $\vec{ab}$  και  $\vec{ac}$  είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι τα διανύσματα  $\vec{ab}$  και  $\vec{ac}$  είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Θεωρούμε την ευθεία  $\mathcal{L} = a + \langle \vec{ab} \rangle$ . Έχουμε  $a \in \mathcal{L}$  και  $b = a + \vec{ab} \in \mathcal{L}$ . Καθώς τα  $\vec{ab}$  και  $\vec{ac}$  είναι γραμμικώς εξαρτημένα, έπεται  $\vec{ac} \in \langle \vec{ab} \rangle$  και επομένως  $c = a + \vec{ac} \in \mathcal{L}$ . Άρα,  $a, b, c \in \mathcal{L}$  και επομένως τα  $a, b, c$  είναι συνευθειακά.  $\square$

**Ορισμός 1.9.** Ας είναι  $a, b, c, d$  τέσσερα διαφορετικά, μη συνευθειακά σημεία του  $\mathcal{E}$ . Τα σημεία  $a, b, c, d$  καλούνται *συνεπίπεδα*, αν υπάρχει ένα επίπεδο του  $\mathcal{E}$  το οποίο τα περιέχει.

Ας υποθέσουμε ότι  $a, b, c, d$  είναι τέσσερα διαφορετικά μη συνευθειακά σημεία και τα  $a, b, c$  είναι συνευθειακά. Θα δείξουμε ότι υπάρχει ένα επίπεδο  $\mathcal{P}$  τέτοιο, ώστε  $a, b, c, d \in \mathcal{P}$ . Τα σημεία  $a, b, d$  είναι μη συνευθειακά και επομένως, σύμφωνα με το Παράδειγμα 1.19, ανήκουν στο επίπεδο  $\mathcal{P}_{a,b,d}$ . Καθώς τα  $a, b, c$  είναι συνευθειακά, από την προηγούμενη πρόταση τα διανύσματα  $\vec{ab}$  και  $\vec{ac}$  είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Άρα  $\vec{ac} \in \langle \vec{ab} \rangle$  και επομένως  $c \in \mathcal{P}$ .

**Πρόταση 1.11.** Ας είναι  $a, b, c, d$  τέσσερα διαφορετικά, μη συνευθειακά ανά τρία, σημεία του  $\mathcal{E}$ . Τα  $a, b, c, d$  είναι συνεπίπεδα, αν και μόνον αν, τα διανύσματα  $\vec{ab}, \vec{ac}$  και  $\vec{ad}$  είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

*Απόδειξη.* Ας υποθέσουμε ότι τα  $a, b, c, d$  είναι συνεπίπεδα. Τότε, υπάρχει ένα επίπεδο  $\mathcal{P} = u + \vec{\mathcal{P}}$  του  $\mathcal{E}$  τέτοιο, ώστε  $a, b, c, d \in \mathcal{P}$ . Επομένως, έχουμε  $\vec{ab}, \vec{ac}, \vec{ad} \in \vec{\mathcal{P}}$ . Καθώς  $\dim \vec{\mathcal{P}} = 2$ , έπεται ότι τα διανύσματα  $\vec{ab}, \vec{ac}$  και  $\vec{ad}$  είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι τα διανύσματα  $\vec{ab}, \vec{ac}$  και  $\vec{ad}$  είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Καθώς τα  $a, b$  και  $c$  είναι μη συνευθειακά, τα διανύσματα  $\vec{ab}$  και  $\vec{ac}$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Έτσι, έχουμε το επίπεδο  $\mathcal{P} = a + \langle \vec{ab}, \vec{ac} \rangle$  και  $a, b, c \in \mathcal{P}$ . Επειδή τα διανύσματα  $\vec{ab}, \vec{ac}$  και  $\vec{ad}$  είναι γραμμικώς εξαρτημένα, έχουμε  $\vec{ad} \in \langle \vec{ab}, \vec{ac} \rangle$  και κατά συνέπεια  $d \in \mathcal{P}$ . Άρα, τα σημεία  $a, b, c, d$  είναι συνεπίπεδα.  $\square$

**Πρόταση 1.12.** Ας είναι  $(\mathcal{V}_i)_{i \in I}$  μία οικογένεια ομοπαράλληλων υποχώρων του  $\mathcal{E}$ . Τότε η τομή  $\bigcap_{i \in I} \mathcal{V}_i$  είναι ομοπαράλληλος υποχώρος του  $\mathcal{E}$ .

*Απόδειξη.* Θέτουμε  $\mathcal{U} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{V}_i$ . Ας είναι  $v, w \in \mathcal{U}$  και  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  με  $\lambda + \mu = 1$ . Τότε  $v, w \in \mathcal{V}_i$ , για κάθε  $i \in I$ . Καθώς το  $\mathcal{V}_i$  είναι ομοπαράλληλος υποχώρος του  $\mathcal{E}$ , έχουμε  $\lambda v + \mu w \in \mathcal{V}_i$ . Άρα  $\lambda v + \mu w \in \mathcal{U}$ . Συνεπώς, το σύνολο  $\mathcal{U}$  είναι ομοπαράλληλος υποχώρος του  $\mathcal{E}$ .  $\square$

**Ορισμός 1.10.** Ας είναι  $S$  μη κενό υποσύνολο του  $\mathcal{E}$ . Καλούμε *ομοπαράλληλο κάλυμμα* του  $S$  και το συμβολίζουμε με  $\langle S \rangle$  την τομή όλων των ομοπαράλληλων υποχώρων του  $\mathcal{E}$  που περιέχουν το  $S$ .

Αν  $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ , τότε θα γράφουμε πιο απλά  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  αντί  $\langle \{a_1, \dots, a_n\} \rangle$ . Σύμφωνα με τα παραπάνω, το σύνολο  $\langle S \rangle$  είναι ένας ομοπαράλληλος υποχώρος του  $\mathcal{E}$  και μάλιστα ο μικρότερος ομοπαράλληλος χώρος του  $\mathcal{E}$  που περιέχει το  $S$ .

Αν  $S = \{a\}$ , τότε  $\langle S \rangle = \{a\}$ . Ας είναι  $a, b \in \mathcal{E}$  με  $a \neq b$  και  $\mathcal{L}_{a,b}$  η μοναδική ευθεία που διέρχεται από τα  $a$  και  $b$ . Τότε  $\langle a, b \rangle \subseteq \mathcal{L}_{a,b}$ . Αν  $\langle a, b \rangle \neq \mathcal{L}_{a,b}$ , τότε  $\dim \langle a, b \rangle = 0$  και επομένως  $a = b$  που είναι άτοπο. Άρα  $\langle a, b \rangle = \mathcal{L}_{a,b}$ . Ας είναι τώρα  $a, b, c$  τρία διαφορετικά μη συνευθειακά σημεία του  $\mathcal{E}$  και  $\mathcal{P}_{a,b,c}$  το μοναδικό επίπεδο που τα περιέχει. Τότε  $\langle a, b, c \rangle \subseteq \mathcal{P}_{a,b,c}$ . Αν  $\langle a, b, c \rangle \neq \mathcal{P}_{a,b,c}$ , τότε  $\dim \langle a, b, c \rangle \leq 1$  και επομένως τα  $a, b, c$  είναι συνευθειακά ή όχι διαφορετικά που είναι άτοπο. Άρα  $\langle a, b, c \rangle = \mathcal{P}_{a,b,c}$ .

Θεωρούμε το σύνολο

$$\Sigma(S) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i / n \geq 1, a_i \in S, \lambda_i \in \mathbb{R} (i = 1, \dots, n) \text{ με } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

**Πρόταση 1.13.** Ας είναι  $S$  ένα μη κενό υποσύνολο του  $\mathcal{E}$ . Τότε, ισχύει  $\langle S \rangle = \Sigma(S)$ .

Απόδειξη. Ας είναι  $a, b \in \Sigma(S)$  και  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  με  $\lambda + \mu = 1$ . Τότε, έχουμε

$$a = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r, \quad b = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_s b_s,$$

όπου  $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s \in S$  και  $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_s \in \mathbb{R}$  με

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_r = 1 \quad \text{και} \quad \mu_1 + \dots + \mu_s = 1.$$

Θεωρούμε  $c \in \mathcal{E}$  και έχουμε:

$$a = c + \sum_{i=1}^r \lambda_i \overrightarrow{c a_i} \quad \text{και} \quad b = c + \sum_{i=1}^s \mu_i \overrightarrow{c b_i}.$$

Έτσι, παίρνουμε:

$$\overrightarrow{c a} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \overrightarrow{c a_i} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{c b} = \sum_{i=1}^s \mu_i \overrightarrow{c b_i}.$$

Ας είναι  $g = \lambda a + \mu b$ . Τότε, έχουμε:

$$\begin{aligned} g &= c + \lambda \overrightarrow{c a} + \mu \overrightarrow{c b} \\ &= c + \lambda \sum_{i=1}^r \lambda_i \overrightarrow{c a_i} + \mu \sum_{i=1}^s \mu_i \overrightarrow{c b_i} \\ &= \sum_{i=1}^r (\lambda \lambda_i) a_i + \sum_{i=1}^s (\mu \mu_i) b_i. \end{aligned}$$

Καθώς

$$\sum_{i=1}^r \lambda \lambda_i + \sum_{i=1}^s \mu \mu_i = \lambda \sum_{i=1}^r \lambda_i + \mu \sum_{i=1}^s \mu_i = \lambda + \mu = 1.$$

Άρα, το σημείο  $g$  είναι το βαρύκεντρο των  $(a_i, \lambda_i)$  ( $i = 1, \dots, r$ ) και  $(b_j, \mu_j)$  ( $j = 1, \dots, s$ ). Άρα, ισχύει  $g \in \Sigma(S)$  και επομένως το  $\Sigma(S)$  είναι ομοπαράλληλικός υποχώρος του  $\mathcal{E}$ .

Τέλος, αν  $\mathcal{V}$  είναι ένας ομοπαράλληλικός υποχώρος του  $\mathcal{E}$  με  $S \subseteq \mathcal{V}$ , τότε το βαρύκεντρο κάθε πεπερασμένου συνόλου σημείων του  $S$  ανήκει στο  $\mathcal{V}$  και κατά συνέπεια  $\Sigma(S) \subseteq \mathcal{V}$ . Άρα, ισχύει  $\langle S \rangle = \Sigma(S)$ .  $\square$

## 1.4 Ομοπαράλληλικά Πλαίσια

Ας είναι  $(\mathcal{E}, \vec{\mathcal{E}}, +)$  ένας ομοπαράλληλικός χώρος.

**Πρόταση 1.14.** Ας είναι  $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{E}$ . Αν τα διανύσματα  $\overrightarrow{a_i a_j}$  ( $j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ ) είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε, για κάθε  $k \in \{1, \dots, n\}$ , τα διανύσματα  $\overrightarrow{a_k a_j}$  ( $j = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n$ ) είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Απόδειξη. Ας είναι  $k \in \{1, \dots, n\}$  με  $k \neq i$  και ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν  $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  έτσι, ώστε να ισχύει

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j \overrightarrow{a_k a_j} = \vec{0}.$$

Από την Πρόταση 1.2(α) έχουμε:

$$\overrightarrow{a_k a_j} = \overrightarrow{a_k a_i} + \overrightarrow{a_i a_j}.$$

Έτσι παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j \overrightarrow{a_k a_j} &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j \overrightarrow{a_k a_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j \overrightarrow{a_i a_j} \\ &= - \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j \right) \overrightarrow{a_i a_k} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k, i}}^n \lambda_j \overrightarrow{a_i a_j}. \end{aligned}$$

Οπότε προκύπτει:

$$- \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j \right) \overrightarrow{a_i a_k} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k, i}}^n \lambda_j \overrightarrow{a_i a_j} = \vec{0}.$$

Άρα, τα διανύσματα  $\overrightarrow{a_i a_j}$  ( $j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ ) είναι γραμμικώς εξαρτημένα που είναι άτοπο. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι τα διανύσματα  $\overrightarrow{a_k a_j}$  ( $j = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n$ ) είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.  $\square$

**Ορισμός 1.11.** Τα σημεία  $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{E}$  καλούνται *ομοπαράλληλικά ανεξάρτητα*, αν υπάρχει  $i \in \{1, \dots, n\}$  έτσι, ώστε τα διανύσματα  $\overrightarrow{a_i a_j}$  ( $j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ ) να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Δύο σημεία  $a, b \in \mathcal{E}$  είναι ομοπαράλληλικά ανεξάρτητα αν και μόνον αν  $\overrightarrow{ab} \neq 0$ , δηλαδή, αν και μόνον αν  $a \neq b$ .

Τρία σημεία  $a, b, c \in \mathcal{E}$  είναι ομοπαράλληλικά ανεξάρτητα, αν και μόνον αν, τα διανύσματα  $\overrightarrow{ab}$  και  $\overrightarrow{ac}$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Αυτό, σύμφωνα με την Πρόταση 1.10, ισοδυναμεί με την ιδιότητα τα σημεία  $a, b$  και  $c$  να είναι μη συνευθειακά.

Επίσης, τέσσερα σημεία  $a, b, c, d \in \mathcal{E}$  είναι ομοπαράλληλικά ανεξάρτητα αν και μόνον αν τα διανύσματα  $\overrightarrow{ab}$ ,  $\overrightarrow{ac}$  και  $\overrightarrow{ad}$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Αυτό όμως συμβαίνει, σύμφωνα με την Πρόταση 1.11, αν και μόνον αν, τα σημεία  $a, b, c$  και  $d$  είναι μη συνεπίπεδα.

**Ορισμός 1.12.** Κάθε  $m+1$ -άδα  $(a_0, \dots, a_m) \in \mathcal{E}^{m+1}$  τέτοια, ώστε τα διανύσματα  $\overrightarrow{a_0 a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0 a_m}$  να αποτελούν μία βάση του  $\vec{\mathcal{E}}$  καλείται *ομοπαράλληλικό πλαίσιο* ή *ομοπαράλληλικό σύστημα συντεταγμένων* με αρχή το  $a_0$ .

Παρατηρούμε ότι αν  $\dim \vec{\mathcal{E}} = m$ , τότε η  $m+1$ -άδα  $(a_0, \dots, a_m) \in \mathcal{E}^{m+1}$  είναι ένα ομοπαράλληλικό πλαίσιο του  $\mathcal{E}$  αν και μόνον αν τα σημεία  $a_0, \dots, a_m$  είναι ομοπαράλληλικά ανεξάρτητα.

Ας είναι  $B = (a_0, \dots, a_m) \in \mathcal{E}^{m+1}$  ένα ομοπαράλληλικό πλαίσιο. Αν  $x \in \mathcal{E}$ , τότε  $x = a_0 + \overrightarrow{a_0 x}$ . Οπότε, υπάρχει μοναδική  $m$ -άδα  $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$  έτσι, ώστε

$$x = a_0 + x_1 \overrightarrow{a_0 a_1} + \dots + x_m \overrightarrow{a_0 a_m}.$$

**Ορισμός 1.13.** Οι αριθμοί της  $m$ -άδας  $(x_1, \dots, x_m)$  καλούνται *Καρτεσιανές συντεταγμένες* του  $x$  ως προς το ομοπαράλληλικό πλαίσιο  $B$ .

Έχουμε:

$$x = a_0 + \sum_{i=1}^m x_i \overrightarrow{a_0 a_i} \iff x = \left( 1 - \sum_{i=1}^m x_i \right) a_0 + \sum_{i=1}^m x_i a_i.$$

Έτσι, παίρνουμε τη γραφή του  $x$  ως βαρύκεντρο

$$x = \lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_m a_m,$$

όπου  $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^m x_i$  και  $\lambda_i = x_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Είναι προφανές ότι ισχύει  $\lambda_0 + \dots + \lambda_m = 1$ . Η μοναδικότητα της  $m$ -άδας  $(x_1, \dots, x_m)$  συνεπάγεται τη μοναδικότητα της  $m+1$ -άδας  $(\lambda_0, \dots, \lambda_m)$ .

**Ορισμός 1.14.** Οι αριθμοί της  $(m + 1)$ -άδας  $(\lambda_0, \dots, \lambda_m)$  καλούνται βαρυκεντρικές συντεταγμένες του  $x$  ως προς το ομοπαράλληλο πλαίσιο  $B$ .

**Πρόταση 1.15.** Ας είναι  $B = (a_0, \dots, a_m) \in \mathcal{E}^{m+1}$  ένα ομοπαράλληλο πλαίσιο και  $x_1, \dots, x_q \in \mathcal{E}$  με

$$x_j = \sigma_{j,0}a_0 + \dots + \sigma_{j,m}a_m \quad (j = 1, \dots, q).$$

Αν  $g$  είναι το βαρύκεντρο των βεβαρημένων σημείων  $(x_j, k_j)$  ( $j = 1, \dots, q$ ) με  $k_1 + \dots + k_q = 1$ , τότε οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες του  $g$  ως προς το  $B$  δίνονται από την  $m + 1$ -άδα

$$\left( \sum_{j=1}^q k_j \sigma_{j,0}, \dots, \sum_{j=1}^q k_j \sigma_{j,m} \right).$$

Απόδειξη. Έχουμε:

$$x_j = a_0 + \sum_{i=0}^m \sigma_{j,i} \overrightarrow{a_0 a_i}$$

και

$$g = x_1 + \sum_{j=1}^q k_j \overrightarrow{x_1 x_j}.$$

Καθώς ισχύει

$$\overrightarrow{x_1 x_j} = \sum_{i=0}^m (\sigma_{j,i} - \sigma_{1,i}) \overrightarrow{a_0 a_i},$$

παίρνουμε

$$g = x_1 + \sum_{j=1}^q k_j \sum_{i=0}^m (\sigma_{j,i} - \sigma_{1,i}) \overrightarrow{a_0 a_i}.$$

Έτσι, προκύπτει:

$$g = a_0 + \sum_{i=0}^m \sigma_{1,i} \overrightarrow{a_0 a_i} + \sum_{j=1}^q k_j \sum_{i=0}^m (\sigma_{j,i} - \sigma_{1,i}) \overrightarrow{a_0 a_i}.$$

Επομένως, έχουμε:

$$g = a_0 + \sum_{i=0}^m \left( \sum_{j=1}^q k_j \sigma_{j,i} \right) \overrightarrow{a_0 a_i}.$$

Άρα, οι Καρτεσιανές συντεταγμένες του  $g$  είναι η  $m$ -άδα

$$\left( \sum_{j=1}^q k_j \sigma_{j,1}, \dots, \sum_{j=1}^q k_j \sigma_{j,m} \right).$$

Καθώς έχουμε

$$\begin{aligned} 1 - \sum_{j=1}^q k_j \sigma_{j,1} - \dots - \sum_{j=1}^q k_j \sigma_{j,m} &= 1 - \sum_{j=1}^q k_j (\sigma_{j,1} + \dots + \sigma_{j,m}) \\ &= 1 - \sum_{j=1}^q k_j (1 - \sigma_{j,0}) \\ &= \sum_{j=1}^q k_j \sigma_{j,0}. \end{aligned}$$

Άρα, οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες του  $g$  ως προς το  $B$  δίνονται από την  $m + 1$ -άδα

$$\left( \sum_{j=1}^q k_j \sigma_{j,0}, \dots, \sum_{j=1}^q k_j \sigma_{j,m} \right).$$

□

**Παράδειγμα 1.20.** Θεωρούμε τον ομοπαράλληλο χώρο  $A^n$  και τα σημεία  $E_0 = (0, \dots, 0), E_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, E_n = (0, \dots, 0, 1)$ . Τα διανύσματα

$$\overrightarrow{E_0 E_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \overrightarrow{E_0 E_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

αποτελούν μία βάση του  $\mathbb{R}^n$  και επομένως η  $n + 1$ -άδα  $(E_0, E_1, \dots, E_n)$  είναι ένα ομοπαράλληλο πλαίσιο του  $A^n$ .

**Παράδειγμα 1.21.** Θεωρούμε τα σημεία  $a = (3, 1), b = (-1, 2)$  και  $c = (0, -1)$  του  $A^2$ . Θα εξετάσουμε αν η τριάδα  $(a, b, c)$  είναι ένα ομοπαράλληλο πλαίσιο του  $A^2$ . Αυτό συμβαίνει, αν και μόνον αν, τα διανύσματα  $\overrightarrow{ab}$  και  $\overrightarrow{ac}$  αποτελούν μία βάση του  $\mathbb{R}^2$ . Αρκεί λοιπόν να εξετάσουμε αν τα διανύσματα

$$\overrightarrow{ab} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ και } \overrightarrow{ac} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Τα  $\overrightarrow{ab}$  και  $\overrightarrow{ac}$  είναι γραμμικώς εξαρτημένα, αν και μόνον αν, υπάρχουν  $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$  με  $(z_1, z_2) \neq (0, 0)$  τέτοια, ώστε

$$z_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Η προηγούμενη ισότητα δίνει:

$$-4z_1 - 3z_2 = 0, \quad z_1 - 2z_2 = 0,$$

απ' όπου έπεται  $z_1 = z_2 = 0$  που είναι άτοπο. Άρα, τα διανύσματα  $\overrightarrow{ab}$  και  $\overrightarrow{ac}$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και κατά συνέπεια η τριάδα  $(a, b, c)$  αποτελεί ένα ομοπαράλληλο πλαίσιο του  $A^2$ .

**Παράδειγμα 1.22.** Θεωρούμε τον ομοπαράλληλο χώρο  $(\mathcal{P}_{n,1}, \mathcal{P}_{n,0}, +)$  του Παραδείγματος 1.6. Η διάσταση του χώρου  $\mathcal{P}_{n,1}$  είναι  $n$ . Θα δείξουμε ότι τα πολυώνυμα  $f_i = (i + 1)x^i$  ( $i = 0, \dots, n$ ) αποτελούν ένα ομοπαράλληλο πλαίσιο του χώρου  $\mathcal{P}_{n,1}$ .

Καθώς έχουμε

$$\int_0^1 f_i dx = (i + 1) \int_0^1 x^i dx = 1,$$

το πολυώνυμο  $f_i$  ανήκει στο  $\mathcal{P}_{n,1}$ . Στη συνέχεια θεωρούμε τα πολυώνυμα  $\overrightarrow{f_0 f_i} = -1 + (i + 1)x^i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  τέτοια, ώστε να ισχύει

$$c_1(-1 + 2x) + \dots + c_n(-1 + (n + 1)x^n) = 0$$

ή

$$-(c_1 + \dots + c_n) + 2c_1x + \dots + (n + 1)c_nx^n = 0.$$

Τότε, παίρνουμε  $c_1 = \dots = c_n = 0$  και επομένως τα πολυώνυμα  $\overrightarrow{f_0 f_i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Συνεπώς, η  $n + 1$ -άδα  $(f_0, \dots, f_n)$  είναι ένα ομοπαράλληλο πλαίσιο του  $\mathcal{P}_{n,1}$ .



**Παράδειγμα 1.23.** Ας είναι  $(a, b, c)$  το ομοπαράλληλο πλαίσιο του Παραδείγματος 1.21. Θα προσδιορίσουμε τα σημεία  $p$  και  $q$  του  $A^2$  με βαρυκεντρικές συντεταγμένες  $(1/6, 1/3, 1/2)$  και  $(1/2, 1/4, 1/4)$ , αντίστοιχα.

Έχουμε:

$$p = a + \frac{1}{3} \vec{ab} + \frac{1}{2} \vec{ac} = (3, 1) + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \left( \frac{1}{6}, \frac{1}{3} \right)$$

και

$$q = a + \frac{1}{4} \vec{ab} + \frac{1}{4} \vec{ac} = (3, 1) + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \left( \frac{5}{4}, \frac{3}{4} \right).$$

Ας είναι  $r$  ένα σημείο του  $A^2$  με Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(2, 1)$  ως προς το ομοπαράλληλο πλαίσιο  $(a, b, c)$ . Θα βρούμε τις βαρυκεντρικές του συντεταγμένες. Έχουμε:

$$r = a + 2\vec{ab} + \vec{ac}.$$

Οπότε ισχύει:

$$r = (-2)a + 2b + c.$$

Επομένως, οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες του  $r$  ως προς το  $(a, b, c)$  είναι  $(-2, 2, 1)$ .

Στη συνέχεια θεωρούμε το βαρύκεντρο  $g$  των  $(p, 1/8)$ ,  $(q, 2/8)$  και  $(r, 5/8)$ . Θα υπολογίσουμε τις βαρυκεντρικές συντεταγμένες του  $g$  ως προς το  $(a, b, c)$ . Έχουμε:

$$g = a + \frac{1}{8} \vec{ap} + \frac{2}{8} \vec{aq} + \frac{5}{8} \vec{ar}.$$

Από την άλλη πλευρά, έχουμε

$$\vec{ap} = \frac{1}{3} \vec{ab} + \frac{1}{2} \vec{ac}, \quad \vec{aq} = \frac{1}{4} \vec{ab} + \frac{1}{4} \vec{ac}, \quad \vec{ar} = 2\vec{ab} + \vec{ac}.$$

Έτσι παίρνουμε:

$$g = a + \frac{65}{48} \vec{ab} + \frac{3}{4} \vec{ac}.$$

Οπότε έχουμε:

$$g = \frac{-53}{48} a + \frac{65}{48} b + \frac{3}{4} c.$$

Άρα, οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες του  $g$  είναι  $(-53/48, 65/48, 3/4)$ .

## 1.5 Ασκήσεις-Εργασίες

### Ασκήσεις

**1.5.1** Ας είναι  $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 1\}$ ,  $\vec{\mathcal{E}} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 / a + b = 0\}$  και η απεικόνιση

$$+ : \mathcal{E} \times \vec{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}, ((x, y), (a, b)) \longmapsto (x + a, y + b).$$

Ναδειχθεί ότι η τριάδα  $(\mathcal{E}, \vec{\mathcal{E}}, +)$  είναι ένας ομοπαράλληλος χώρος διάστασης 1.

**1.5.2** Ας είναι  $(\mathcal{E}, \vec{\mathcal{E}}, +)$  ένας ομοπαράλληλος χώρος. Αν  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  με  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ , τότε, για κάθε  $a, b \in \mathcal{E}$  ισχύει:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{aa}_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{ba}_i.$$

**1.5.3** Θεωρούμε τον ομοπαράλληλο χώρο  $(\mathcal{P}_{n,1}, \mathcal{P}_{n,0}, +)$  του Παραδείγματος 1.6.

(α) Να δειχθεί ότι το υποσύνολο  $\mathcal{V}$  του  $\mathcal{P}_{n,1}$  το οποίο αποτελείται από όλα τα πολυώνυμα του  $\mathcal{P}_{n,1}$  που διαιρούνται από το  $(x - 1/2)^2$  είναι ένας ομοπαράλληλος υποχώρος του  $\mathcal{P}_{n,1}$  και να βρεθεί η διεύθυνσή του.

(β) Ας είναι  $n = 4$ . Θεωρούμε το ομοπαράλληλο πλαίσιο

$$B = \left\{ 0, 1, x - \frac{1}{2}, \left(x - \frac{1}{2}\right)^2, \left(x - \frac{1}{2}\right)^3, \left(x - \frac{1}{2}\right)^4 \right\}.$$

Να προσδιοριστεί το γραμμικό σύστημα του οποίου το σύνολο λύσεων είναι το σύνολο των Καρτεσιανών συντεταγμένων των σημείων του  $\mathcal{V}$  και να δειχθεί ότι ο χώρος  $\mathcal{V}$  είναι επίπεδο.

**1.5.4** Ας είναι  $(\mathcal{E}_i, \vec{\mathcal{E}}_i, +_i)$  ( $i = 1, 2$ ) δύο ομοπαράλληλοι χώροι. Θέτουμε  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$  και  $V = \vec{\mathcal{E}}_1 \times \vec{\mathcal{E}}_2$ . Θεωρούμε την απεικόνιση  $+$  :  $\mathcal{E} \times V \rightarrow \mathcal{E}$  η οποία για κάθε  $(a_1, a_2) \in \mathcal{E}$  και  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \in V$  ορίζεται ως εξής:

$$(a_1, a_2) + (\vec{u}_1, \vec{u}_2) = (a_1 +_1 \vec{u}_1, a_2 +_2 \vec{u}_2).$$

Να δειχθεί ότι η τριάδα  $(\mathcal{E}, V, +)$  είναι ένας ομοπαράλληλος χώρος. Επίσης, να γενικευτεί το αποτέλεσμα αυτό για την περίπτωση μίας οικογένειας ομοπαράλληλων χώρων.

**1.5.5** Ας είναι  $a, b, c \in \mathbb{A}^2$ . Θεωρούμε τις Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$  και τις βαρυκεντρικές συντεταγμένες  $(a_0, a_1, a_2), (b_0, b_1, b_2), (c_0, c_1, c_2)$  των  $a, b, c$ , αντίστοιχα, ως προς το ομοπαράλληλο πλαίσιο  $((0, 0), (1, 0), (0, 1))$ . Να δειχθούν τα εξής:

(α) Τα  $a, b, c$  είναι συνευθειακά, αν και μόνον αν, ισχύει:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(β) Τα  $a, b, c$  είναι συνευθειακά, αν και μόνον αν, ισχύει:

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

**1.5.6** Ας είναι  $a, b, c, d \in \mathbb{A}^3$ . Θεωρούμε τις Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3), (d_1, d_2, d_3)$  και τις βαρυκεντρικές συντεταγμένες  $(a_0, a_1, a_2, a_3), (b_0, b_1, b_2, b_3), (c_0, c_1, c_2, c_3), (d_0, d_1, d_2, d_3)$  των  $a, b, c, d$  αντίστοιχα, ως προς το πλαίσιο  $((0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ . Να δειχθούν τα εξής:

(α) Τα  $a, b, c, d$  είναι συνεπίπεδα αν και μόνον αν ισχύει:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(β) Τα  $a, b, c, d$  είναι συνεπίπεδα αν και μόνον αν ισχύει:

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0.$$

**1.5.7** Ας είναι  $(O, A, B)$  ένα ομοπαράλληλο πλαίσιο του  $\mathbb{A}^2$  και  $a, b$  δύο διαφορετικά σημεία του  $\mathbb{A}^2$ . Αν  $(a_0, a_1, a_2)$  και  $(b_0, b_1, b_2)$  είναι οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες των  $a$  και  $b$  ως προς το πλαίσιο  $(O, A, B)$ , τότε ένα σημείο  $x \in \mathbb{A}^2$  με βαρυκεντρικές συντεταγμένες  $(x_0, x_1, x_2)$  ανήκει στην ευθεία  $\langle a, b \rangle$ , αν και μόνον αν, ισχύει:

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)x + (a_2 b_0 - a_0 b_2)y + (a_0 b_1 - a_1 b_0)z = 0.$$

Να δειχθεί ότι το σύνολο σημείων μίας ευθείας σε βαρυκεντρικές συντεταγμένες  $(x, y, z)$  είναι ακριβώς το σύνολο των λύσεων μίας εξίσωσης της μορφής

$$ux + vy + wz = 0,$$

όπου  $u \neq v, u \neq w, v \neq w$ . Επίσης να δειχθεί ότι δύο εξισώσεις

$$ux + vy + wz = 0 \quad \text{και} \quad u'x + v'y + w'z = 0$$

παριστούν την ίδια ευθεία σε βαρυκεντρικές συντεταγμένες αν και μόνον αν  $(u', v', w') = \lambda(u, v, w)$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**1.5.8** Θεωρούμε την απεικόνιση

$$f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^3, t \mapsto (t, t^2, t^3).$$

Ας είναι  $t_i \in \mathbb{A}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) τέσσερα διαφορετικά ανά δύο στοιχεία του  $\mathbb{A}$ . Να δειχθεί ότι τα σημεία  $f(t_i)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) δεν είναι συνεπίπεδα.

**1.5.9** Ας είναι  $\mathcal{E}$  ομοπαράλληλος χώρος,  $a \in \mathcal{E}$  και  $\mathcal{F}$  υποχώρος του  $\mathcal{E}$ . Να δειχθεί ότι υπάρχει ένας μοναδικός υποχώρος  $\mathcal{G}$  του  $\mathcal{E}$  τέτοιος, ώστε  $a \in \mathcal{G}$  και ο  $\mathcal{G}$  είναι παράλληλος προς τον  $\mathcal{F}$ .

**1.5.10** Ας είναι  $\mathcal{E}$  ομοπαράλληλος χώρος,  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  δύο υποχώροι του  $\mathcal{E}$  και  $a_1 \in \mathcal{F}_1, a_2 \in \mathcal{F}_2$ . Να δειχθούν τα εξής:

$$(\alpha) \quad \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \overrightarrow{a_1 a_2} \in \overrightarrow{\mathcal{F}_1} + \overrightarrow{\mathcal{F}_2}.$$

$$(\beta) \quad \langle \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \rangle = a_1 + \overrightarrow{\mathcal{F}_1} + \overrightarrow{\mathcal{F}_2} + \langle \overrightarrow{a_1 a_2} \rangle.$$

**1.5.11** Ας είναι  $\mathcal{E}$  ομοπαράλληλος χώρος και  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  δύο υποχώροι του. Να δειχθούν τα εξής:

(α) Αν  $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \neq \emptyset$ , τότε

$$\dim \langle \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \rangle = \dim \mathcal{F}_1 + \dim \mathcal{F}_2 - \dim(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2).$$

(β) Αν  $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \emptyset$ , τότε

$$\dim \langle \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \rangle = \dim \mathcal{F}_1 + \dim \mathcal{F}_2 - \dim(\overrightarrow{\mathcal{F}_1} \cap \overrightarrow{\mathcal{F}_2}) + 1.$$

**1.5.12** Ας είναι  $(\mathcal{V}_i)_{i \in I}$  μία οικογένεια ομοπαράλληλων υποχώρων του  $\mathcal{E}$ . Σύμφωνα με την Πρόταση 1.12, το σύνολο  $\bigcap_{i \in I} \mathcal{V}_i$  είναι ομοπαράλληλος υποχώρος του  $\mathcal{E}$ . Να δειχθεί ότι η κατεύθυνσή του είναι ο διανυσματικός χώρος  $\bigcap_{i \in I} \overrightarrow{\mathcal{V}_i}$ .

**1.5.13** Ας είναι  $\mathcal{E}$  ομοπαράλληλος χώρος και  $x, y \in \mathcal{E}$ . Να δειχθεί ότι υπάρχει ένα μοναδικό σημείο  $z \in \mathcal{E}$  τέτοιο, ώστε  $\overrightarrow{xz} = \overrightarrow{zy}$ . Το σημείο  $z$  καλείται μέσο του  $\{x, y\}$ . Επίσης, να δειχθεί ότι το σημείο  $z$  είναι το μέσο των  $x$  και  $y$ , αν και μόνον αν, ισχύει  $2\overrightarrow{xz} = \overrightarrow{xy}$ .

**1.5.14** Να δειχθεί ότι η τομή ενός υπερεπιπέδου και μίας ευθείας μη παράλληλης σ' αυτό, είναι ένα μονοσύνολο.

**1.5.15** Ας είναι  $\mathcal{E}$  ομοπαράλληλος χώρος και  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  δύο υποχώροι του. Να δειχθούν τα εξής:

(α) Αν  $\overrightarrow{\mathcal{A}} + \overrightarrow{\mathcal{B}} = \overrightarrow{\mathcal{E}}$ , τότε  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$ .

(β)  $\overrightarrow{\mathcal{A}} \oplus \overrightarrow{\mathcal{B}} = \overrightarrow{\mathcal{E}}$ , τότε το  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$  αποτελείται από ένα στοιχείο.

**Βιβλιογραφία**

- [1] M. Berger. *Geometry 1*. Universitext. Springer Verlag, 2004.
- [2] J. Gallier. *Curves and Surfaces in Geometric Modelling: Theory and Algorithms*. San Francisco: The Morgan-Kaufmann Series in Computer Graphics. Morgan-Kauffman Publishers, 1999.
- [3] J. Gallier. *Geometric Methods and Applications*. Springer, 2011.
- [4] Y. Ladegaillie. *Géométrie, Affine, Projective, Euclidienne et Anallagmatique*. Ellipses, 2003.
- [5] D. Pedoe. *Geometry. A comprehensive course*. Dover, 1988.
- [6] E. Snapper και T. Robert. *Metric Affine Geometry*. Dover, 1989.
- [7] C. Tisseron. *Géométries affines, projectives, et euclidiennes*. first edition. Hermann, 1994.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

# ΚΛΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

### Σύνοψη

Σ' αυτό το κεφάλαιο χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 1 θα δώσουμε την απόδειξη μερικών κλασικών θεωρημάτων της Γεωμετρίας σε έναν ομοπαράλληλο χώρο  $(\mathcal{E}, \vec{\mathcal{E}}, +)$  διάστασης 2. Πιο συγκεκριμένα θα ασχοληθούμε με το βαρύκεντρο ενός τριγώνου και με τα θεωρήματα των Θαλή, Πάππου, Μενελάου, Desargues και Ceva. Περισσότερες πληροφορίες περιέχονται στα εξής συγγράμματα τα οποία αναφέρονται ως βιβλιογραφία στο τέλος του κεφαλαίου.

### 2.1 Βαρύκεντρο τριγώνου

Σ' αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με το βαρύκεντρο ενός τριγώνου.

**Ορισμός 2.1.** Ας είναι  $A, B \in \mathcal{E}$  με  $A \neq B$ . Καλούμε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα  $A$  και  $B$  το κυρτό κάλυμμα των  $A$  και  $B$ , δηλαδή το σύνολο

$$[AB] = \{\lambda A + (1 - \lambda)B / \lambda \in [0, 1]\}.$$

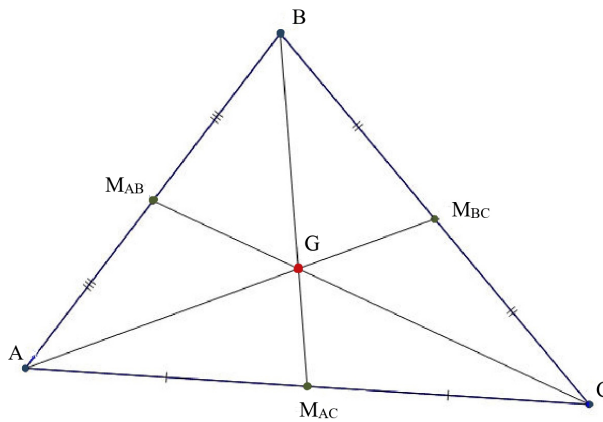
Το σημείο

$$M_{AB} = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$$

καλείται μέσο του ευθυγράμμου τμήματος  $[AB]$ .

**Ορισμός 2.2.** Ας είναι τρία διαφορετικά μη συνευθειακά σημεία  $A, B, C$  του  $\mathcal{E}$ . Το σύνολο  $ABC = [AB] \cup [BC] \cup [CA]$  καλείται τρίγωνο με κορυφές  $A, B, C$  και πλευρές  $[AB], [BC], [CA]$ . Το βαρύκεντρο των βεβαρμένων σημείων  $(A, 1/3), (B, 1/3)$  και  $(C, 1/3)$  καλείται βαρύκεντρο του τριγώνου  $ABC$ .

**Θεώρημα 2.1.** Ας είναι  $ABC$  ένα τρίγωνο του  $\mathcal{E}$ . Τότε, οι τρεις ευθείες  $L_A = \langle A, M_{BC} \rangle, L_B = \langle B, M_{AC} \rangle$  και  $L_C = \langle C, M_{AB} \rangle$  τέμνονται στο βαρύκεντρο  $G$  του τριγώνου  $ABC$ .



Σχήμα 2.1: Βαρύκεντρο Τριγώνου.

*Απόδειξη.* Το σημείο  $G$  είναι το βαρύκεντρο των σημείων  $(A, 1/3)$ ,  $(B, 1/3)$  και  $(C, 1/3)$ . Σύμφωνα με τον Αλγόριθμο 1.1, για να υπολογίσουμε το  $G$ , μπορούμε να υπολογίσουμε πρώτα το βαρύκεντρο  $M_{AB}$  των  $(A, 1/2)$  και  $(B, 1/2)$  και κατόπιν το βαρύκεντρο των  $(M_{AB}, 2/3)$  και  $(C, 1/3)$ . Συνεπώς, το  $G$  ανήκει στην ευθεία  $L_C$ . Στη συνέχεια, παίρνοντας τα σημεία  $(B, 1/2)$  και  $(C, 1/2)$  και εργαζόμενοι όπως προηγουμένως βλέπουμε ότι το  $G$  ανήκει στην ευθεία  $L_A$ . Ομοια, συμπεραίνουμε ότι το  $G$  ανήκει και στην ευθεία  $L_B$ . Συνεπώς, οι ευθείες  $L_A$ ,  $L_B$  και  $L_C$  έχουν ως κοινό τους σημείο το βαρύκεντρο  $G$ .  $\square$

Το προηγούμενο κλασικό θεώρημα γενικεύεται ως εξής:

**Θεώρημα 2.2.** *Ας είναι  $ABC$  ένα τρίγωνο του  $\mathcal{E}$  και  $G$  ένα σημείο του  $\mathcal{E}$  διαφορετικό από τα  $A$ ,  $B$  και  $C$ . Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

(α) *Το  $G$  είναι το κοινό σημείο τομής των ευθειών  $\langle A, P \rangle$ ,  $\langle B, Q \rangle$ ,  $\langle C, R \rangle$ , όπου  $P \in \langle B, C \rangle$ ,  $Q \in \langle C, A \rangle$ ,  $R \in \langle A, B \rangle$ .*

(β) *Υπάρχουν  $a, b, c \in \mathbb{R}$  έτσι, ώστε το  $G$  να είναι το βαρύκεντρο των βεβαρημένων σημείων  $(A, a)$ ,  $(B, b)$ ,  $(C, c)$ , το σημείο  $P$  το βαρύκεντρο των  $(B, b/(b+c))$ ,  $(C, c/(b+c))$ , το σημείο  $Q$  το βαρύκεντρο των  $(C, c/(a+c))$ ,  $(A, a/(a+c))$  και το σημείο  $R$  το βαρύκεντρο των  $(A, a/(a+b))$ ,  $(B, b/(a+b))$ .*

*Απόδειξη.* Ας υποθέσουμε ότι ισχύει η πρόταση (α). Καθώς  $\dim \mathcal{E} = 2$  και τα διανύσματα  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  αποτελούν μία βάση του  $\mathcal{E}$ , υπάρχουν  $b, c \in \mathbb{R}$  έτσι, ώστε  $\vec{AG} = b\vec{AB} + c\vec{AC}$ . Επομένως, θέτοντας  $a = 1 - b - c$ , έχουμε:

$$G = aA + bB + cC.$$

Άρα, το σημείο  $G$  είναι το βαρύκεντρο των βεβαρημένων σημείων  $(A, a)$ ,  $(B, b)$ ,  $(C, c)$ . Ας υποθέσουμε ότι  $b + c = 0$ . Έτσι, έχουμε:

$$\vec{AG} = b(\vec{AB} - \vec{AC}) = b\vec{CB}.$$

Αν  $b \neq 0$ , τότε οι ευθείες  $\langle A, G \rangle$  και  $\langle C, B \rangle$  είναι παράλληλες και επομένως η τομή τους είναι κενή. Καθώς όμως  $P \in \langle A, G \rangle \cap \langle C, B \rangle$ , καταλήγουμε σε άτοπο. Έτσι, έχουμε  $b = 0$  και επομένως  $c = 0$ ,  $a = 1$ , απ' όπου παίρνουμε  $A = G$  το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς, ισχύει  $b + c \neq 0$ . Από την Πρόταση 1.5 έχουμε ότι  $G = aA + (b+c)P'$ , όπου  $P'$  είναι το βαρύκεντρο των  $(B, b/(b+c))$  και  $(C, c/(b+c))$ . Καθώς  $P' \in \langle B, C \rangle \cap \langle A, G \rangle$ , έπεται  $P = P'$ . Ομοίως, αποδεικνύεται ότι το σημείο  $Q$  είναι το βαρύκεντρο των  $(C, c)$ ,  $(A, a)$  και το σημείο  $R$  το βαρύκεντρο των  $(A, a)$ ,  $(B, b)$ . Άρα, ισχύει η πρόταση (β).

Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι ισχύει η πρόταση (β). Τότε, έχουμε  $G = aA + bB + cC$ . Καθώς το  $P$  είναι το βαρύκεντρο των  $(B, b/(b+c))$ ,  $(C, c/(b+c))$ , η Πρόταση 1.5 συνεπάγεται ότι  $G = aA + (b+c)P$  και επομένως  $G \in \langle A, P \rangle$ . Ομοίως παίρνουμε  $G \in \langle B, Q \rangle$  και  $G \in \langle C, R \rangle$ . Άρα, το  $G$  είναι το κοινό σημείο τομής των ευθειών  $\langle A, P \rangle$ ,  $\langle B, Q \rangle$ ,  $\langle C, R \rangle$  και κατά συνέπεια ισχύει η πρόταση (α).  $\square$

## 2.2 Το Θεώρημα του Θαλή

Σ' αυτή την ενότητα δίνουμε την απόδειξη του γνωστού θεωρήματος του Θαλή και δύο εφαρμογές του.

**Ορισμός 2.3.** Ας είναι  $A, B, C$  τρία διαφορετικά συνευθειακά σημεία του  $\mathcal{E}$ . Τότε, υπάρχει  $\alpha \in \mathbb{R}$  τέτοιο, ώστε  $\overrightarrow{AC} = \alpha \overrightarrow{AB}$ . Καλούμε λόγο του  $\overrightarrow{AC}$  ως προς  $\overrightarrow{AB}$  τον πραγματικό αριθμό  $\alpha$  και τον συμβολίζουμε με

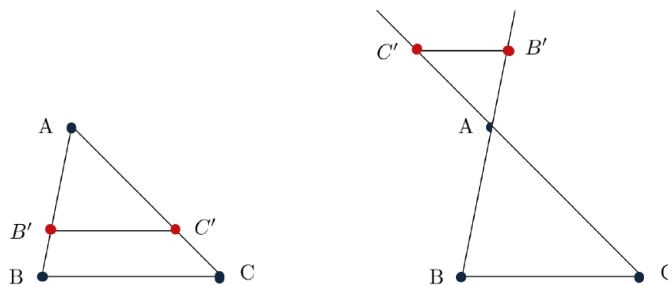
$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}}.$$

**Θεώρημα 2.3.** (Θεώρημα του Θαλή) Ας είναι  $ABC$  ένα τρίγωνο του  $\mathcal{E}$  και  $B' \in \langle A, B \rangle$ ,  $C' \in \langle A, C \rangle$ . Τότε, οι ευθείες  $\langle B, C \rangle$  και  $\langle B', C' \rangle$  είναι παράλληλες, αν και μόνον αν, ισχύει:

$$\frac{\overrightarrow{AB'}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{AC}}.$$

Σ' αυτή την περίπτωση, οι δύο παραπάνω λόγοι ισούνται και με τον λόγο

$$\frac{\overrightarrow{B'C'}}{\overrightarrow{BC}}.$$



Σχήμα 2.2: Θεώρημα του Θαλή.

*Απόδειξη.* Ας υποθέσουμε ότι οι ευθείες  $\langle B, C \rangle$  και  $\langle B', C' \rangle$  είναι παράλληλες. Τότε, οι διανυσματικοί χώροι που παράγονται αντίστοιχα από τα διανύσματα  $\overrightarrow{B'C'}$  και  $\overrightarrow{BC}$  συμπίπτουν. Οπότε, ισχύει  $\overrightarrow{B'C'} = \lambda \overrightarrow{BC}$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Από την άλλη πλευρά, καθώς  $B' \in \langle A, B \rangle$  και  $C' \in \langle A, C \rangle$ , έχουμε:

$$B' = (1 - \beta)A + \beta B, \quad \text{και} \quad C' = (1 - \gamma)A + \gamma C,$$

όπου  $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ . Επομένως, ισχύει:

$$\overrightarrow{AB'} = \beta \overrightarrow{AB} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{AC'} = \gamma \overrightarrow{AC}.$$

Από την Πρόταση 1.2(α) έχουμε:

$$\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB'}.$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση προκύπτει:

$$\lambda \overrightarrow{BC} = \gamma \overrightarrow{AC} - \beta \overrightarrow{AB}.$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.2(α) παίρνουμε:

$$\lambda(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \gamma \overrightarrow{AC} - \beta \overrightarrow{AB}.$$



Έτσι, έχουμε:

$$(\lambda - \gamma)\vec{AC} + (\beta - \gamma)\vec{AB} = \vec{0}.$$

Καθώς τα διανύσματα  $\vec{AC}$  και  $\vec{AB}$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, παίρνουμε  $\lambda = \beta = \gamma$ . Συνεπώς, έχουμε:

$$\frac{\vec{AB'}}{\vec{AB}} = \beta = \gamma = \frac{\vec{AC'}}{\vec{AC}}$$

και

$$\frac{\vec{AB'}}{\vec{AB}} = \beta = \lambda = \frac{\vec{B'C'}}{\vec{BC}}.$$

Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι ισχύει:

$$\frac{\vec{AB'}}{\vec{AB}} = \frac{\vec{AC'}}{\vec{AC}}.$$

Τότε, έχουμε:

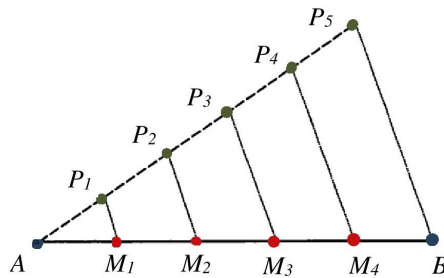
$$\vec{AB'} = \lambda\vec{AB} \quad \text{και} \quad \vec{AC'} = \lambda\vec{AC},$$

όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.2(α), παίρνουμε:

$$\vec{B'C'} = \vec{AC'} - \vec{AB'} = \lambda\vec{AC} - \lambda\vec{AB} = \lambda\vec{BC}.$$

Επομένως, οι ευθείες  $\langle B, C \rangle$  και  $\langle B', C' \rangle$  είναι παράλληλες. □

Στη συνέχεια δίνουμε δύο εφαρμογές του Θεωρήματος του Θαλή.



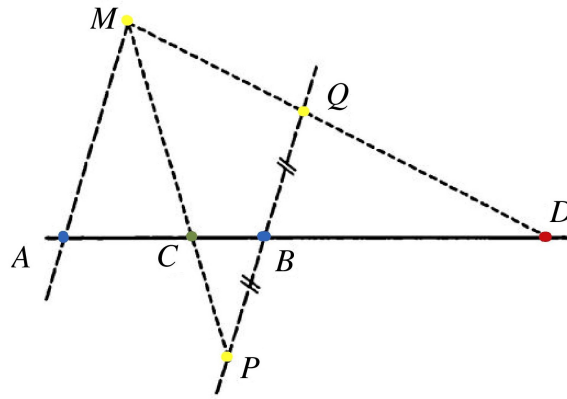
Σχήμα 2.3: Υποδιαίρεση ευθυγράμμου τμήματος σε 5 ίσα τμήματα.

1. Υποδιαίρεση ενός ευθύγραμμου τμήματος σε  $n$  ίσα μέρη. Ας είναι  $[A, B]$  ένα ευθύγραμμο τμήμα. Θα το χωρίσουμε σε  $n$  ίσα μέρη. Θεωρούμε μία τυχούσα ευθεία διαφορετική από την  $\langle A, B \rangle$  η οποία διέρχεται από το σημείο  $A$  και επί αυτής σημεία  $P_1, \dots, P_n$  έτσι, ώστε να έχουμε:

$$\frac{\vec{AP_2}}{\vec{AP_1}} = 2, \quad \frac{\vec{AP_3}}{\vec{AP_1}} = 3, \quad \dots, \quad \frac{\vec{AP_n}}{\vec{AP_1}} = n.$$

Έτσι τα σημεία  $P_1, \dots, P_n$  υποδιαιρούν το ευθύγραμμο τμήμα  $[A, P_n]$  σε  $n$  ίσα μέρη. Θεωρούμε την ευθεία  $\langle P_n, B \rangle$  και από τα σημεία  $P_1, \dots, P_{n-1}$  τις παράλληλες ευθείες προς την  $\langle P_n, B \rangle$ . Αυτές τέμνουν την ευθεία  $\langle A, B \rangle$  στα σημεία  $M_1, \dots, M_{n-1}$ , αντίστοιχα. Οι ευθείες  $\langle P_1, M_1 \rangle, \dots, \langle P_2, M_{n-1} \rangle, \langle P_n, B \rangle$  είναι παράλληλες μεταξύ τους και επομένως το Θεώρημα του Θαλή δίνει:

$$\frac{\vec{AM_2}}{\vec{AM_1}} = \frac{\vec{AP_2}}{\vec{AP_1}} = 2, \quad \dots, \quad \frac{\vec{AM_{n-1}}}{\vec{AM_1}} = \frac{\vec{AP_{n-1}}}{\vec{AP_1}} = n-1, \quad \frac{\vec{AB}}{\vec{AM_1}} = \frac{\vec{AP_n}}{\vec{AP_1}} = n.$$



Σχήμα 2.4: Κατασκευή του συζυγούς αρμονικού του  $C$  ως προς τα  $A$  και  $B$ .

Συνεπώς, τα σημεία  $M_1, \dots, M_n$  υποδιαιρούν το ευθύγραμμο τμήμα  $[A, B]$  σε  $n$  ίσα μέρη.

2. Κατασκευή του συζυγούς αρμονικού ενός σημείου. Ας είναι  $A, B$  δύο διαφορετικά σημεία και  $C$  ένα σημείο της ευθείας  $\langle A, B \rangle$ . Καλούμε συζυγές αρμονικό του σημείου  $C$  ως προς τα σημεία  $A$  και  $B$  ένα σημείο  $D$  επί της ευθείας  $\langle A, B \rangle$  τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}}.$$

Για την κατασκευή του  $D$  εργαζόμαστε ως εξής: Θεωρούμε δύο τυχούσες παράλληλες ευθείες  $\mathcal{L}_A$  και  $\mathcal{L}_B$  οι οποίες διέρχονται από τα σημεία  $A$  και  $B$ , αντίστοιχα. Επιλέγουμε ένα τυχόν σημείο  $M$  της  $\mathcal{L}_A$  με  $M \neq A$ . Η ευθεία  $\langle M, C \rangle$  τέμνει την ευθεία  $\mathcal{L}_B$  σε ένα σημείο  $P$ . Θεωρούμε το σημείο  $Q$  της ευθείας  $\mathcal{L}_B$  τέτοιο, ώστε να ισχύει  $\overrightarrow{BQ} = -\overrightarrow{BP}$ . Η ευθεία  $\langle M, Q \rangle$  τέμνει την  $\langle A, B \rangle$  στο σημείο  $D$  το οποίο είναι το συζυγές αρμονικό του  $C$ . Πράγματι, από το Θεώρημα του Θαλή έχουμε:

$$-\frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}} = -\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{BQ}} = \frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{BP}} = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}}.$$

Επομένως, το σημείο  $D$  είναι το συζυγές αρμονικό του  $C$  ως προς τα σημεία  $A$  και  $B$ .

### 2.3 Το Θεώρημα του Πάππου

Η απόδειξη του θεωρήματος του Πάππου δίνεται σε αυτή την ενότητα.

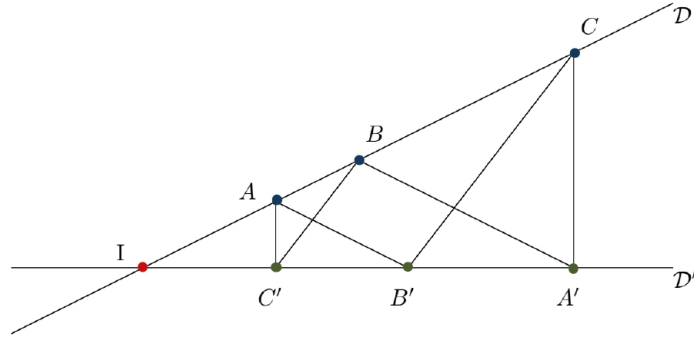
**Θεώρημα 2.4.** (Θεώρημα του Πάππου) Ας είναι  $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$  δύο διαφορετικές ευθείες του  $\mathcal{E}$ . Θεωρούμε τρία διαφορετικά σημεία  $A, B, C \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}'$  και τρία διαφορετικά σημεία  $A', B', C' \in \mathcal{D}' \setminus \mathcal{D}$ . Αν οι ευθείες  $\langle A, B' \rangle$ ,  $\langle B, A' \rangle$  είναι παράλληλες και οι ευθείες  $\langle B, C' \rangle$ ,  $\langle C, B' \rangle$  παράλληλες, τότε οι ευθείες  $\langle C, A' \rangle$ ,  $\langle A, C' \rangle$  είναι επίσης παράλληλες.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι  $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \{I\}$ . Καθώς οι ευθείες  $\langle A, B' \rangle$  και  $\langle B, A' \rangle$  είναι παράλληλες, από το Θεώρημα του Θαλή παίρνουμε:

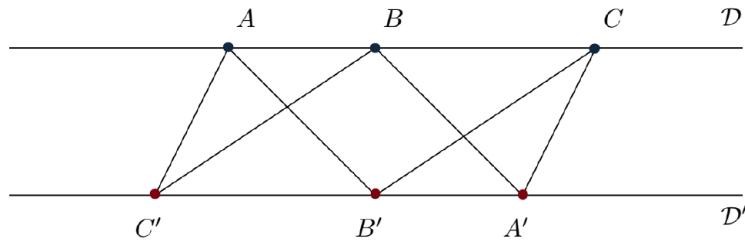
$$\frac{\overrightarrow{IA'}}{\overrightarrow{IB'}} = \frac{\overrightarrow{IB}}{\overrightarrow{IA}} = k.$$

Άρα, έχουμε:

$$\overrightarrow{IA'} = k \overrightarrow{IB'} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{IB} = k \overrightarrow{IA}.$$



Σχήμα 2.5: Θεώρημα του Πάππου. Περίπτωση μη παράλληλων ευθειών.



Σχήμα 2.6: Θεώρημα του Πάππου. Περίπτωση παράλληλων ευθειών.

Ομοίως υπάρχει  $l \in \mathbb{R}$  τέτοιο, ώστε:

$$\vec{IB'} = l\vec{IC'} \quad \text{και} \quad \vec{IC} = l\vec{IB}.$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω ισότητες, παίρνουμε:

$$\vec{IA'} = kl\vec{IC'} \quad \text{και} \quad \vec{IC} = kl\vec{IA}.$$

Επομένως, ισχύει:

$$\frac{\vec{IA'}}{\vec{IC'}} = \frac{\vec{IC}}{\vec{IA}}.$$

Οπότε, από το Θεώρημα του Θαλή έχουμε ότι οι ευθείες  $\langle A, C' \rangle$  και  $\langle A', C \rangle$  είναι παράλληλες.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι ευθείες  $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$  είναι παράλληλες. Επομένως, ισχύει  $\vec{B'A'} = \lambda \vec{AB}$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Καθώς οι ευθείες  $\langle A, B' \rangle, \langle B, A' \rangle$  είναι παράλληλες, έχουμε  $\vec{A'B} = \mu \vec{AB'}$ , όπου  $\mu \in \mathbb{R}$ . Έτσι, προκύπτει:

$$\vec{AB} = \vec{AB'} + \vec{B'A'} + \vec{A'B} = \vec{AB'} + \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AB'}.$$

Οπότε, έχουμε:

$$(\lambda - 1)\vec{AB} + (1 + \mu)\vec{AB'} = \vec{0}.$$

Επειδή τα σημεία  $A, B, B'$  δεν είναι συνευθειακά, τα διανύσματα  $\vec{AB}, \vec{AB'}$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και επομένως  $\lambda - 1 = \mu + 1 = 0$ . Άρα, ισχύει  $\vec{B'A'} = \vec{AB}$ . Ομοίως, παίρνουμε  $\vec{C'B'} = \vec{BC}$ . Έτσι, έχουμε:

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{C'B'} + \vec{B'A'} = \vec{C'A'}.$$

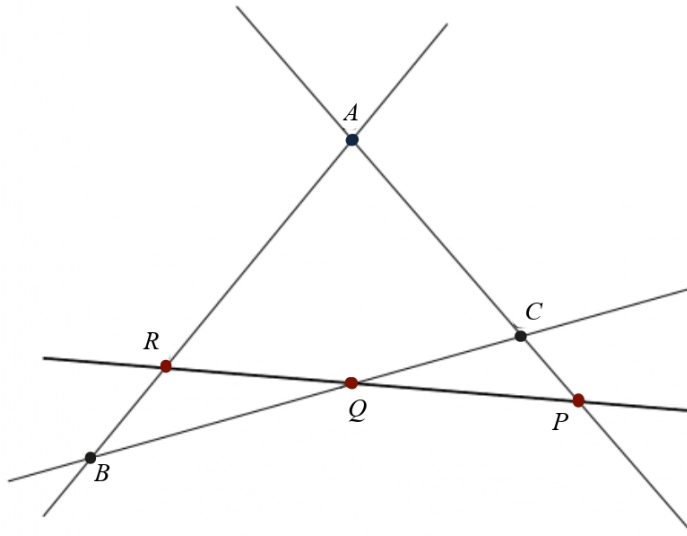
Οπότε, από την Πρόταση 1.2(δ) έπεται  $\vec{CA'} = \vec{AC'}$  και επομένως οι ευθείες  $\langle C, A' \rangle, \langle A, C' \rangle$  είναι παράλληλες.  $\square$

## 2.4 Το Θεώρημα του Μενελάου

Το θεώρημα του Μενελάου αποτελεί το αντικείμενο αυτής της ενότητας.

**Θεώρημα 2.5.** (Θεώρημα του Μενελάου) *Ας είναι  $ABC$  ένα τρίγωνο του  $\mathcal{E}$  και  $P \in \langle A, C \rangle$ ,  $Q \in \langle B, C \rangle$ ,  $R \in \langle A, B \rangle$  τρία σημεία διαφορετικά από τις κορυφές  $A, B, C$ . Τότε, τα σημεία  $P, Q, R$  είναι συννευθιακά, αν και μόνον αν, ισχύει:*

$$\frac{\overrightarrow{PA}}{\overrightarrow{PC}} \frac{\overrightarrow{QC}}{\overrightarrow{QB}} \frac{\overrightarrow{RB}}{\overrightarrow{RA}} = 1.$$



Σχήμα 2.7: Θεώρημα του Μενελάου.

*Απόδειξη.* Τα σημεία  $A, B, C$  είναι μη συννευθιακά και επομένως η τριάδα  $(A, B, C)$  ένα ομοπαράλληλο πλαίσιο του  $\mathcal{E}$ . Ας είναι  $(p_1, 0, p_3)$ ,  $(0, q_2, q_3)$ ,  $(r_1, r_2, 0)$  οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες των  $P, Q, R$  ως προς το πλαίσιο  $(A, B, C)$ . Καθώς τα  $P, Q, R$  είναι διαφορετικά από τις κορυφές  $A, B, C$ , οι αριθμοί  $p_1, p_3, q_2, q_3, r_1, r_2$  είναι μη μηδενικοί. Έχουμε:

$$P = p_1A + p_3C, \quad Q = q_2B + q_3C, \quad R = r_1A + r_2B.$$

Έτσι, παίρνουμε:

$$P = P + p_1\overrightarrow{PA} + p_3\overrightarrow{PC}, \quad Q = Q + q_2\overrightarrow{QB} + q_3\overrightarrow{QC}, \quad R = R + r_1\overrightarrow{RA} + r_2\overrightarrow{RB}.$$

Επομένως, ισχύει:

$$p_1\overrightarrow{PA} + p_3\overrightarrow{PC} = \vec{0}, \quad q_2\overrightarrow{QB} + q_3\overrightarrow{QC} = \vec{0}, \quad r_1\overrightarrow{RA} + r_2\overrightarrow{RB} = \vec{0}.$$

Οπότε, προκύπτει:

$$\frac{\overrightarrow{PA}}{\overrightarrow{PC}} \frac{\overrightarrow{QC}}{\overrightarrow{QB}} \frac{\overrightarrow{RB}}{\overrightarrow{RA}} = -\frac{p_3q_2r_1}{p_1q_3r_2}.$$

Από την άλλη πλευρά, ισχύει:

$$Q = P + q_2\overrightarrow{PB} + q_3\overrightarrow{PC} \quad \text{και} \quad R = P + r_1\overrightarrow{PA} + r_2\overrightarrow{PB}.$$

Επίσης, έχουμε:

$$\overrightarrow{PA} = -\frac{p_3}{p_1} \overrightarrow{PC}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, παίρνουμε:

$$\vec{PQ} = q_2 \vec{PB} + q_3 \vec{PC} \quad \text{και} \quad \vec{PR} = -\frac{p_3 r_1}{p_1} \vec{PC} + r_2 \vec{PB}.$$

Καθώς  $P \in \langle A, C \rangle$  και  $\langle A, C \rangle \cap \langle B, C \rangle = \{C\}$ , τα  $B, C, P$  είναι συνευθειακά, αν και μόνον αν,  $P = C$  πράγμα άτοπο. Άρα, τα  $B, C, P$  δεν είναι συνευθειακά και επομένως τα  $\vec{PB}$  και  $\vec{PC}$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Έτσι, υπάρχει  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  με  $\vec{PR} = k\vec{PQ}$ , αν και μόνον αν, ισχύει:

$$(r_2 - kq_2)\vec{PB} - \left(\frac{p_3 r_1}{p_1} + kq_3\right)\vec{PC} = \vec{0}.$$

Καθώς τα διανύσματα  $\vec{PB}, \vec{PC}$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, η παραπάνω ισότητα ισοδυναμεί με τις ισότητες

$$\frac{r_2}{q_2} = k = -\frac{p_3 r_1}{q_3 p_1}.$$

Συνεπώς, τα  $\vec{PR}$  και  $\vec{PQ}$  είναι γραμμικώς εξαρτημένα, αν και μόνον αν, ισχύει:

$$\frac{p_3 q_2 r_1}{q_3 r_2 p_1} = -1.$$

Έτσι, τα σημεία  $P, Q, R$  είναι συνευθειακά, αν και μόνον αν, έχουμε:

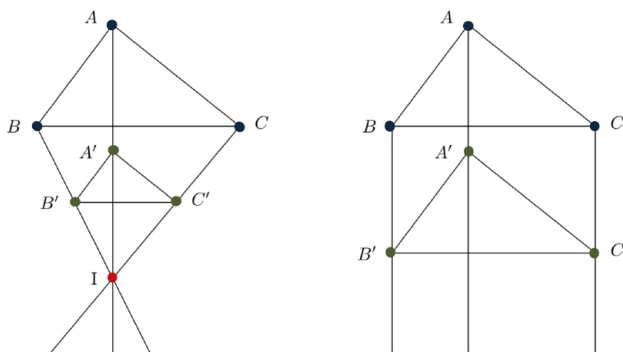
$$\frac{\vec{PA}}{\vec{PC}} \frac{\vec{QC}}{\vec{QB}} \frac{\vec{RB}}{\vec{RA}} = 1.$$

□

## 2.5 Το Θεώρημα του Desargues

Σ' αυτή την ενότητα δίνεται η απόδειξη του θεωρήματος του Desargues.

**Θεώρημα 2.6.** (Θεώρημα του Desargues) Ας είναι  $ABC, A'B'C'$  δύο τρίγωνα του  $\mathcal{E}$  με  $A \neq A', B \neq B', C \neq C'$ . Αν η ευθεία  $\langle A, B \rangle$  είναι παράλληλη με την  $\langle A'B' \rangle$ , η  $\langle B, C \rangle$  με την  $\langle B', C' \rangle$  και η  $\langle C, A \rangle$  με την  $\langle C', A' \rangle$ , τότε οι ευθείες  $\langle A, A' \rangle, \langle B, B' \rangle$  και  $\langle C, C' \rangle$  είτε είναι παράλληλες είτε έχουν ένα κοινό σημείο.



Σχήμα 2.8: Θεώρημα του Desargues.

Απόδειξη. Αν οι ευθείες  $\langle A, A' \rangle$ ,  $\langle B, B' \rangle$  και  $\langle C, C' \rangle$  δεν είναι παράλληλες, τότε από το Παράδειγμα 1.17 έχουμε ότι δύο από αυτές, ας είναι οι  $\langle A, A' \rangle$  και  $\langle B, B' \rangle$ , έχουν ένα κοινό σημείο  $I$ . Καθώς οι ευθείες  $\langle A, B \rangle$  και  $\langle A', B' \rangle$  είναι παράλληλες, από το Θεώρημα του Θαλή έπεται:

$$\frac{\vec{IA'}}{\vec{IA}} = \frac{\vec{IB'}}{\vec{IB}} = k.$$

Ας είναι  $C'' \in \langle I, C \rangle$  τέτοιο, ώστε  $\vec{IC''} = k \vec{IC}$ . Έτσι, έχουμε:

$$\frac{\vec{IA'}}{\vec{IA}} = \frac{\vec{IC''}}{\vec{IC}} \quad \text{και} \quad \frac{\vec{IB'}}{\vec{IB}} = \frac{\vec{IC''}}{\vec{IC}}.$$

Επομένως, από το Θεώρημα του Θαλή έχουμε ότι οι ευθείες  $\langle A, C \rangle$  και  $\langle A', C'' \rangle$  είναι παράλληλες, καθώς και οι ευθείες  $\langle B, C \rangle$  και  $\langle B', C'' \rangle$ . Καθώς η ευθεία  $\langle C, A \rangle$  είναι παράλληλη με την  $\langle C', A' \rangle$ , παίρνουμε  $\langle C', A' \rangle = \langle A', C'' \rangle$ . Ομοίως προκύπτει  $\langle C', B' \rangle = \langle B', C'' \rangle$ . Από την άλλη πλευρά έχουμε:

$$\langle C', A' \rangle \cap \langle C', B' \rangle = \{C'\} \quad \text{και} \quad \langle C'', A' \rangle \cap \langle C'', B' \rangle = \{C''\}.$$

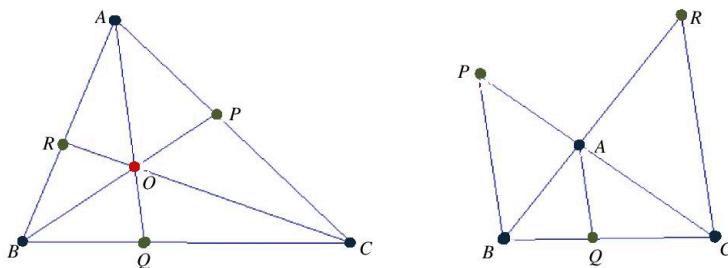
Άρα, ισχύει  $C' = C''$  και κατά συνέπεια οι ευθείες  $\langle A, A' \rangle$ ,  $\langle B, B' \rangle$  και  $\langle C, C' \rangle$  διέρχονται από το σημείο  $I$ . □

### 2.6 Το Θεώρημα του Ceva

Η τελευταία ενότητα του κεφαλαίου είναι αφιερωμένη στο θεώρημα του Ceva.

**Θεώρημα 2.7.** (Θεώρημα του Ceva) Ας είναι  $ABC$  ένα τρίγωνο του  $\mathcal{E}$  και  $P \in \langle A, C \rangle$ ,  $Q \in \langle B, C \rangle$ ,  $R \in \langle A, B \rangle$  τρία σημεία διαφορετικά από τις κορυφές  $A, B, C$ . Τότε, οι ευθείες  $\langle P, B \rangle$ ,  $\langle Q, A \rangle$ ,  $\langle R, C \rangle$  έχουν ένα κοινό σημείο ή είναι παράλληλες, αν και μόνον αν, ισχύει:

$$\frac{\vec{PA}}{\vec{PC}} \frac{\vec{QB}}{\vec{QC}} \frac{\vec{RC}}{\vec{RA}} = -1.$$



Σχήμα 2.9: Θεώρημα του Ceva.

Απόδειξη. Τα σημεία  $A, B, C$  είναι μη συνευθειακά και επομένως η τριάδα  $(A, B, C)$  ένα ομοπαράλληλο πλαίσιο του  $\mathcal{E}$ . Ας είναι

$$P = p_1 A + p_3 C, \quad Q = q_2 B + q_3 C, \quad R = r_1 A + r_2 B$$

η γραφή των  $P, Q, R$  ως προς το ομοπαράλληλο πλαίσιο  $(A, B, C)$ . Τότε, όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.5, προκύπτει:

$$\frac{\vec{PA}}{\vec{PC}} \frac{\vec{QB}}{\vec{QC}} \frac{\vec{RC}}{\vec{RA}} = -\frac{p_3 q_2 r_1}{p_1 q_3 r_2}.$$

Ας υποθέσουμε ότι οι ευθείες  $\langle P, B \rangle$ ,  $\langle Q, A \rangle$ ,  $\langle R, C \rangle$  έχουν ένα κοινό σημείο  $O$ . Τότε, έχουμε:

$$O = pP + bB = qQ + aA = rR + cC.$$

Έτσι, έχουμε:

$$\begin{aligned} O &= pp_1A + bB + pp_3C, \\ &= aA + qq_2B + qq_3C, \\ &= rr_1A + rr_2B + cC. \end{aligned}$$

Καθώς η τριάδα  $(A, B, C)$  είναι ένα ομοπαράλληλο πλαίσιο, παίρνουμε:

$$\frac{r_1}{p_1} = \frac{r}{p}, \quad \frac{q_2}{r_2} = \frac{q}{r}, \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{p}{q}.$$

Επομένως, ισχύει:

$$\frac{p_3q_2r_1}{p_1q_3r_2} = \frac{pqr}{pqr} = 1.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι ευθείες  $\langle P, B \rangle$ ,  $\langle Q, A \rangle$ ,  $\langle R, C \rangle$  είναι παράλληλες. Τότε  $\overrightarrow{AQ} = \lambda \overrightarrow{BP}$  και  $\overrightarrow{CR} = \mu \overrightarrow{BP}$ , όπου  $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Από την άλλη πλευρά ισχύει:

$$P = B + p_1\overrightarrow{BA} + p_3\overrightarrow{BC}, \quad Q = A + q_2\overrightarrow{AB} + q_3\overrightarrow{AC}, \quad R = C + r_1\overrightarrow{CA} + r_2\overrightarrow{CB}.$$

Έτσι, προκύπτει:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BP} &= p_1\overrightarrow{BA} + p_3\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + p_3\overrightarrow{AC}, \\ \overrightarrow{AQ} &= q_2\overrightarrow{AB} + q_3\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + q_3\overrightarrow{BC}, \\ \overrightarrow{CR} &= r_1\overrightarrow{CA} + r_2\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} + r_1\overrightarrow{BA}. \end{aligned}$$

Τα διανύσματα  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  και  $\overrightarrow{CA}$  είναι ανά δύο γραμμικώς ανεξάρτητα. Οπότε, από τις σχέσεις  $\overrightarrow{AQ} = \lambda \overrightarrow{BP}$  και  $\overrightarrow{CR} = \mu \overrightarrow{BP}$ , παίρνουμε:

$$-p_1\lambda = 1, \quad \lambda p_3 = q_3, \quad -\lambda = q_2, \quad \mu p_1 = r_1, \quad \mu p_3 = -1, \quad \mu = -r_2.$$

Επομένως, έχουμε:

$$\frac{p_3q_2r_1}{p_1q_3r_2} = -\frac{1}{r_1} \frac{1}{p_3} p_1 = \frac{r_1}{r_1} = 1.$$

Άρα, και στις δύο περιπτώσεις ισχύει:

$$\frac{\overrightarrow{PA}}{\overrightarrow{PC}} \frac{\overrightarrow{QC}}{\overrightarrow{QB}} \frac{\overrightarrow{RB}}{\overrightarrow{RA}} = -1.$$

Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι η παραπάνω ισότητα ισχύει. Ας σημειωθεί ότι οι ευθείες  $\langle A, Q \rangle$  και  $\langle B, P \rangle$  είναι διαφορετικές, γιατί διαφορετικά τα σημεία  $A, B, C$  θα ήταν συνευθειακά, πράγμα που δεν συμβαίνει. Διακρίνουμε τις παρακάτω δύο περιπτώσεις:

α) Ισχύει  $\langle A, Q \rangle \cap \langle B, P \rangle = \{O\}$ . Ας υποθέσουμε ότι οι ευθείες  $\langle C, O \rangle$  και  $\langle A, B \rangle$  είναι παράλληλες. Τότε, στα τρίγωνα  $PAB$  και  $QAB$ , από το θεώρημα του Θαλή αντίστοιχα έχουμε:

$$\frac{\overrightarrow{PC}}{\overrightarrow{PA}} = \frac{\overrightarrow{CO}}{\overrightarrow{AB}} \quad \text{και} \quad \frac{\overrightarrow{QC}}{\overrightarrow{QB}} = \frac{\overrightarrow{CO}}{\overrightarrow{BA}}.$$

Οπότε, προκύπτει:

$$\frac{\overrightarrow{PA}}{\overrightarrow{PC}} \frac{\overrightarrow{QC}}{\overrightarrow{QB}} = -1.$$

Επομένως, ισχύει

$$\frac{\overrightarrow{RB}}{\overrightarrow{RA}} = 1,$$

απ' όπου έπεται  $A = B$  που είναι άτοπο. Άρα,  $\langle C, O \rangle$  και  $\langle A, B \rangle$  δεν είναι παράλληλες και ας είναι  $\langle C, O \rangle \cap \langle A, B \rangle = \{C'\}$ . Τότε, στο τρίγωνο  $ABC$ , σύμφωνα με το ορθό του θεωρήματος που αποδείξαμε παραπάνω, ισχύει:

$$\frac{\overrightarrow{PA}}{\overrightarrow{PC}} \frac{\overrightarrow{QC}}{\overrightarrow{QB}} \frac{\overrightarrow{C'B}}{\overrightarrow{C'A}} = -1.$$

Από την άλλη πλευρά, σύμφωνα με την υπόθεση, ισχύει:

$$\frac{\overrightarrow{PA}}{\overrightarrow{PC}} \frac{\overrightarrow{QC}}{\overrightarrow{QB}} \frac{\overrightarrow{RB}}{\overrightarrow{RA}} = -1.$$

Έτσι, παίρνουμε:

$$\frac{\overrightarrow{C'B}}{\overrightarrow{C'A}} = \frac{\overrightarrow{RB}}{\overrightarrow{RA}}.$$

Έχουμε:

$$1 + \frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{C'B}} = \frac{\overrightarrow{C'B} + \overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{C'B}} = \frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}} = \frac{\overrightarrow{RA}}{\overrightarrow{RB}} = \frac{\overrightarrow{RB} + \overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{RB}} = 1 + \frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{RB}}.$$

Έτσι, παίρνουμε  $C' = R$ . Συνεπώς, το  $O$  είναι κοινό σημείο των ευθειών  $\langle P, B \rangle$ ,  $\langle Q, A \rangle$  και  $\langle R, C \rangle$ .

β) Οι ευθείες  $\langle A, Q \rangle$  και  $\langle B, P \rangle$  είναι παράλληλες. Θεωρούμε την ευθεία  $\Gamma$  η οποία διέρχεται από το  $C$  και είναι παράλληλη προς την  $\langle A, Q \rangle$ . Ας υποθέσουμε ότι ευθείες  $\Gamma$ ,  $\langle A, B \rangle$  είναι παράλληλες και επομένως οι ευθείες  $\langle A, B \rangle$ ,  $\langle A, Q \rangle$  είναι παράλληλες. Επομένως, έχουμε  $\langle A, B \rangle = \langle A, Q \rangle$ . Έτσι, έπεται ότι οι ευθείες  $\langle A, B \rangle$  και  $\langle B, P \rangle$  είναι παράλληλες, απ' όπου έχουμε  $\langle A, B \rangle = \langle B, P \rangle$ . Επομένως, τα σημεία  $A, B, P, Q$  είναι συγγραμμικά. Καθώς όμως  $Q \in \langle B, C \rangle$  συνεπάγεται ότι τα σημεία  $A, B, C$  είναι συγγραμμικά που είναι άτοπο. Άρα, οι ευθείες  $\Gamma$  και  $\langle A, B \rangle$  δεν είναι παράλληλες. Ας είναι  $C'$  το σημείο τομής τους. Τότε, στο τρίγωνο  $ABC$ , από το ορθό του θεωρήματος που αποδείξαμε παραπάνω, παίρνουμε:

$$\frac{\overrightarrow{PA}}{\overrightarrow{PC}} \frac{\overrightarrow{QC}}{\overrightarrow{QB}} \frac{\overrightarrow{C'B}}{\overrightarrow{C'A}} = -1.$$

Συνεχίζουμε, όπως στην περίπτωση (α), και παίρνουμε ότι  $C' = R$ . Άρα, έχουμε  $\Gamma = \langle C, R \rangle$  και κατά συνέπεια οι ευθείες  $\langle P, B \rangle$ ,  $\langle Q, A \rangle$ ,  $\langle R, C \rangle$  είναι παράλληλες.  $\square$

## 2.7 Ασκήσεις-Εργασίες

### Ασκήσεις

**2.7.1** Ας είναι  $\mathcal{E}$  ομοπαράλληλικός χώρος διάστασης 2 και  $D_A, D_B, D_C$  τρεις διακεκριμένες παράλληλες ευθείες του  $\mathcal{E}$ . Οι ευθείες αυτές τέμνουν δύο άλλες διακεκριμένες ευθείες  $L$  και  $L'$  στα διακεκριμένα σημεία  $A, B, C$  και  $A', B', C'$ , αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι ισχύει:

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{A'C'}}.$$

**2.7.2** Ας είναι  $\mathcal{E}$  ομοπαράλληλικός χώρος διάστασης 2 και  $D_A, D_B$  δύο διακεκριμένες παράλληλες ευθείες του  $\mathcal{E}$  και  $D_C$  μία τρίτη διαφορετική ευθεία. Οι τρεις αυτές ευθείες τέμνουν μία ευθεία  $L$  στα διακεκριμένα



σημεία  $A, B, C$  και μία άλλη διαφορετική ευθεία  $L'$  στα διακεκριμένα σημεία  $A', B', C'$ , αντίστοιχα. Αν  $C \neq C'$  και

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{A'C'}}$$

τότε ναδειχθεί ότι η ευθεία  $D_C$  είναι παράλληλη προς τις  $D_A$  και  $D_B$ .

**2.7.3** Ας είναι  $\mathcal{E}$  ομοπαράλληλος χώρος διάστασης 2 και  $x, y, x', y'$  διακεκριμένα σημεία του  $\mathcal{E}$ . Το σύνολο  $xyy'x' = [xy] \cup [yy'] \cup [y', x'] \cup [x', x]$  καλείται τετράπλευρο με κορυφές  $x, y, y', x'$  και πλευρές  $[xy], [yy'], [y', x'], [x', x]$ . Οι εξής ιδιότητες είναι ισοδύναμες:

(α)  $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{x'y'}$ .

(β)  $\overrightarrow{xx'} = \overrightarrow{yy'}$ .

(γ) Τα μέσα των  $\{x, y'\}$  και  $\{x', y\}$  συμπίπτουν.

Αν κάποια από τις ιδιότητες (α), (β), (γ) αληθεύει και τα διανύσματα  $\overrightarrow{xy}, \overrightarrow{xx'}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε το τετράπλευρο  $xyy'x'$  καλείται παραλληλόγραμμο.

**2.7.4** Ας είναι  $\mathcal{E}$  ομοπαράλληλος χώρος διάστασης 2 και  $a, b, a', b' \in \mathcal{E}$  τέτοια, ώστε τα διανύσματα  $\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{aa'}$  να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Ναδειχθεί ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(α) Η τετράδα  $abb'a'$  είναι ένα παραλληλόγραμμο.

(β)  $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{aa'} = \overrightarrow{ab'}$ .

(γ) Οι ευθείες  $\langle a, b \rangle, \langle a', b' \rangle$  είναι παράλληλες, καθώς και οι ευθείες  $\langle a, a' \rangle, \langle b, b' \rangle$ .

**2.7.5** Ας είναι  $\mathcal{E}$  ομοπαράλληλος χώρος διάστασης 2 και  $ABC, A'B'C'$  τρίγωνα με βαρύκεντρα  $G$  και  $G'$ , αντίστοιχα. Ναδειχθεί ότι ισχύει:

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CA'} = 3\overrightarrow{GG'}$$

Επιπλέον, ναδειχθεί ότι ισχύει  $G = G'$  αν και μόνον αν υπάρχει σημείο  $D$  έτσι, ώστε τα τετράπλευρα  $DBA'C$  και  $DB'AC'$  να είναι παραλληλόγραμμα.

**2.7.6** (Παραλληλόγραμμο του Varignon). Ας είναι  $\mathcal{E}$  ομοπαράλληλος χώρος διάστασης 2 και  $\Pi$  ένα τετράπλευρο του  $\mathcal{E}$ . Ναδειχθεί ότι τα μέσα των πλευρών του  $\Pi$  είναι κορυφές ενός παραλληλογράμμου.

**2.7.7** Ας είναι  $\mathcal{E}$  ομοπαράλληλος χώρος διάστασης  $n$  και  $A_0, \dots, A_n$  ομοπαράλληλα ανεξάρτητα σημεία του  $\mathcal{E}$ . Ας υποθέσουμε ότι  $M_i \in \langle A_i, A_{i+1} \rangle$  και  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  έτσι, ώστε  $\overrightarrow{A_i M_i} = \lambda_i \overrightarrow{A_i A_{i+1}}$  ( $i = 0, \dots, n$ ) (όπου  $A_{n+1} = A_0$ ). Ναδειχθεί ότι τα σημεία  $M_0, \dots, M_n$  ανήκουν στο ίδιο υπερεπίπεδο αν και μόνον αν ισχύει:

$$(\lambda_0 - 1) \cdots (\lambda_n - 1) - \lambda_0 \cdots \lambda_n = 0.$$

Επιπλέον, αν τα σημεία  $M_i$  είναι όλα διαφορετικά από τα  $A_i$ , τότε ναδειχθεί ότι η προηγούμενη συνθήκη ισοδυναμεί με την παρακάτω:

$$\frac{\overrightarrow{M_0 A_0} \overrightarrow{M_1 A_1}}{\overrightarrow{M_0 A_1} \overrightarrow{M_1 A_2}} \cdots \frac{\overrightarrow{M_n A_n}}{\overrightarrow{M_n A_{n+1}}} = 1.$$

**2.7.8** Ας είναι  $\mathcal{E}$  ομοπαράλληλος χώρος διάστασης 3. Θεωρούμε δύο ευθείες  $L$  και  $L'$  δύο διακεκριμένες ευθείες του  $\mathcal{E}$ , τρία σημεία  $A, B, C$  επί της  $L$  και τρία σημεία  $A', B', C'$  επί της  $L'$ . Υποθέτουμε ότι τα σημεία  $A, B, C, A', B', C'$  είναι διαφορετικά. Αν ισχύει

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{A'C'}}$$

τότε ναδειχθεί ότι οι ευθείες  $\langle A, A' \rangle, \langle B, B' \rangle, \langle C, C' \rangle$  είναι παράλληλες και συνεπίπεδες.

2.7.9 Ας είναι  $\mathcal{E}$  ομοπαράλληλικός χώρος διάστασης 3,  $L, L'$  δύο ευθείες του  $\mathcal{E}$  και  $\Pi_A, \Pi_B, \Pi_C$  τρία παράλληλα διακεκριμένα επίπεδα του  $\mathcal{E}$ . Αν οι ευθείες  $L$  και  $L'$  τέμνουν τα επίπεδα  $\Pi_A, \Pi_B, \Pi_C$  στα σημεία  $A, B, C$  και  $A', B', C'$ , αντίστοιχα, τότε να δειχθεί ότι ισχύει:

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{A'C'}}.$$

2.7.10 Ας είναι  $\mathcal{E}$  ένας ομοπαράλληλικός χώρος και  $a, b, c, d$  τέσσερα συγγραμμικά σημεία του. Θέτουμε

$$[a, b, c, d] = \frac{\overrightarrow{ca}/\overrightarrow{da}}{\overrightarrow{cb}/\overrightarrow{db}}.$$

Αν  $c = (1 - \alpha)a + \alpha b$  και  $d = (1 - \beta)a + \beta b$ , τότε να δειχθεί:

$$[a, b, c, d] = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{1 - \beta}{\beta}.$$

Επίσης, να δειχθεί ότι  $[a, b, c, d] = -1$  αν και μόνον αν ισχύει:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 2.$$

Σ' αυτή την περίπτωση λέμε ότι η τετράδα  $(a, b, c, d)$  σχηματίζει μία αρμονική διαίρεση.

## Βιβλιογραφία

- [1] M. Audin. *Geometry*. Springer, 2003.
- [2] M. Berger. *Geometry 1*. Universitext. Springer Verlag, 2004.
- [3] Y. Ladegaillie. *Géométrie, Affine, Projective, Euclidienne et Anallagmatique*. Ellipses, 2003.
- [4] D.J Mercier. *Problèmes d'espaces affines*. Dossiers Mathématiques 20, CSIPP, 2017.
- [5] C. Tisseron. *Géométries affines, projectives, et euclidiennes*. first edition. Hermann, 1994.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

---

# ΟΜΟΠΑΡΑΛΛΗΛΙΚΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

---

### Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό μελετούνται οι βασικές ιδιότητες των ομοπαράλληλικών απεικονίσεων, η ομάδα των ομοπαράλληλικών αυτομορφισμών ενός ομοπαράλληλικού χώρου και οι ομοπαράλληλικές μορφές. Για περισσότερες πληροφορίες ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να συμβουλευτεί τα συγγράμματα τα οποία παρατίθενται στο τέλος του κεφαλαίου.

### 3.1 Ορισμός - Βασικές Ιδιότητες

Ας είναι  $(\mathcal{E}, \vec{\mathcal{E}}, +)$  και  $(\mathcal{F}, \vec{\mathcal{F}}, +)$  δύο ομοπαράλληλικοί χώροι.

**Ορισμός 3.1.** Μία απεικόνιση  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  καλείται *ομοπαράλληλική*, αν η  $f$  διατηρεί τα βαρύκεντρα, δηλαδή, για κάθε πεπερασμένη οικογένεια βεβαρημένων σημείων  $(a_i, \lambda_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) με  $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1$  ισχύει:

$$f(\lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_n a_n) = \lambda_0 f(a_0) + \dots + \lambda_n f(a_n)$$

Παρατηρούμε αμέσως ότι αν  $U$  και  $V$  είναι πραγματικοί διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης και  $f : U \rightarrow V$  γραμμική απεικόνιση, τότε η  $f$  είναι μία ομοπαράλληλική απεικόνιση μεταξύ των  $U$  και  $V$  θεωρουμένων ως ομοπαράλληλικών χώρων εφοδιασμένων με την κανονική ομοπαράλληλική δομή τους.

**Παράδειγμα 3.1.** Η απεικόνιση

$$\vec{R} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

είναι μία γραμμική απεικόνιση και επομένως ορίζει μία ομοπαράλληλική απεικόνιση  $R : \mathbb{A}^3 \rightarrow \mathbb{A}^3$ . Η απεικόνιση  $R$  περιγράφει μία περιστροφή των σημείων του επιπέδου του  $\mathbb{A}^3$  που ορίζεται από την εξίσωση  $z = 0$ , γύρω από την ευθεία  $x = y = 0$ , κατά γωνία  $\theta$ .

**Παράδειγμα 3.2.** Ας είναι  $\mathcal{E}$  μη κενό σύνολο και  $\mathcal{F}$  πραγματικός διανυσματικός χώρος. Αν  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ ,  $g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  είναι απεικονίσεις και  $a, b \in \mathbb{R}$ , τότε ορίζουμε την απεικόνιση  $af + bg : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  θέτοντας

$$(af + bg)(x) = af(x) + bg(x), \quad \text{για κάθε } x \in \mathcal{E}.$$

Ας υποθέσουμε ότι  $\mathcal{E}$  είναι ομοπαράλληλος χώρος και οι απεικονίσεις  $f, g$  ομοπαράλληλικές. Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση  $af + bg$  είναι επίσης ομοπαράλληλική. Πράγματι, ας είναι  $(c_i, \lambda_i)$  ( $i = 0, \dots, n$ ) βεβαρημένα σημεία με  $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1$ . Έχουμε:

$$\begin{aligned} (af + bg)\left(\sum_{i=0}^n \lambda_i c_i\right) &= af\left(\sum_{i=0}^n \lambda_i c_i\right) + bg\left(\sum_{i=0}^n \lambda_i c_i\right) \\ &= a \sum_{i=0}^n \lambda_i f(c_i) + b \sum_{i=0}^n \lambda_i g(c_i) \\ &= \sum_{i=0}^n \lambda_i (af(c_i) + bg(c_i)) \\ &= \sum_{i=0}^n \lambda_i (af + bg)(c_i). \end{aligned}$$

Επομένως, η απεικόνιση  $af + bg$  είναι ομοπαράλληλική.

Ας είναι  $a \in \mathcal{E}$ ,  $b \in \mathcal{F}$  και  $h : \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \vec{\mathcal{F}}$  μία γραμμική απεικόνιση. Τότε, ορίζουμε την απεικόνιση  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  θέτοντας

$$f(x) = b + h(\vec{ax}), \quad \text{για κάθε } x \in \mathcal{E}.$$

Παρατηρούμε αμέσως ότι  $f(a) = b$ . Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση  $f$  είναι ομοπαράλληλική. Πράγματι, ας είναι  $(a_i, \lambda_i)$  ( $i = 0, \dots, n$ ) βεβαρημένα σημεία με  $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1$ . Τότε, καθώς

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i a_i = a + \sum_{i=0}^n \lambda_i \vec{aa}_i,$$

έχουμε:

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=0}^n \lambda_i a_i\right) &= b + h\left(\sum_{i=0}^n \lambda_i \vec{aa}_i\right) \\ &= b + \sum_{i=0}^n \lambda_i h(\vec{aa}_i) \\ &= \sum_{i=0}^n \lambda_i (b + h(\vec{aa}_i)) \\ &= \sum_{i=0}^n \lambda_i f(a_i). \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 3.3.** Ας είναι  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  και  $b \in \mathbb{A}^m$ . Οι απεικονίσεις

$$f : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^m, x \longmapsto b + Ax$$

είναι της παραπάνω μορφής και κατά συνέπεια είναι ομοπαράλληλικές απεικονίσεις. Για παράδειγμα, μία τέτοια απεικόνιση είναι η παρακάτω:

$$f : \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^2, (x_1, x_2) \longmapsto (2, 1) + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Καθώς για κάθε  $x \in \mathcal{E}$  υπάρχει μοναδικό  $v \in \vec{\mathcal{E}}$  με  $x = a + \vec{v}$ , η  $f$  ορίζεται ισοδύναμα από τη σχέση:

$$f(a + \vec{v}) = b + h(\vec{v}), \text{ για κάθε } x \in \mathcal{E} \text{ και } v \in \vec{\mathcal{E}}.$$

Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι όλες οι ομοπαράλληλικές απεικονίσεις είναι της παραπάνω μορφής.

**Πρόταση 3.1.** Ας είναι  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  μία ομοπαράλληλική απεικόνιση. Τότε, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση  $\vec{f} : \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \vec{\mathcal{F}}$  τέτοια, ώστε

$$f(a + \vec{v}) = f(a) + \vec{f}(\vec{v}),$$

για κάθε  $a \in \mathcal{E}$  και κάθε  $v \in \vec{\mathcal{E}}$ .

*Απόδειξη.* Ας είναι  $a \in \mathcal{E}$ . Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση  $\vec{f} : \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \vec{\mathcal{F}}$  η οποία ορίζεται από τη σχέση

$$\vec{f}(\vec{v}) = \overrightarrow{f(a)f(a + \vec{v})}, \text{ για κάθε } \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}},$$

είναι γραμμική.

Για  $\vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}$  και  $\lambda \in \mathbb{R}$ , έχουμε

$$a + \lambda \vec{v} = a + \lambda \overrightarrow{a + \vec{v}} + (1 - \lambda) \overrightarrow{a a},$$

απ' όπου, παίρνουμε

$$a + \lambda \vec{v} = \lambda(a + \vec{v}) + (1 - \lambda)a.$$

Επίσης, για  $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}$ , έχουμε

$$a + (\vec{u} + \vec{v}) = a + \overrightarrow{a + \vec{u}} + \overrightarrow{a(a + \vec{v})} - \overrightarrow{a a}$$

και επομένως ισχύει

$$a + (\vec{u} + \vec{v}) = (a + \vec{u}) + (a + \vec{v}) - a.$$

Επειδή η απεικόνιση  $f$  είναι ομοπαράλληλική, παίρνουμε:

$$f(a + \lambda \vec{v}) = \lambda f(a + \vec{v}) + (1 - \lambda)f(a).$$

Έτσι, έχουμε

$$\overrightarrow{f(a)f(a + \lambda \vec{v})} = \lambda \overrightarrow{f(a)f(a + \vec{v})} + (1 - \lambda) \overrightarrow{f(a)f(a)} = \lambda \overrightarrow{f(a)f(a + \vec{v})},$$

απ' όπου έπεται

$$\vec{f}(\lambda \vec{v}) = \lambda \vec{f}(\vec{v}).$$

Επίσης, έχουμε

$$f(a + (\vec{u} + \vec{v})) = f(a + \vec{u}) + f(a + \vec{v}) - f(a),$$

απ' όπου προκύπτει

$$\overrightarrow{f(a)f(a + (\vec{u} + \vec{v}))} = \overrightarrow{f(a)f(a + \vec{u})} + \overrightarrow{f(a)f(a + \vec{v})}$$

και επομένως ισχύει

$$\vec{f}(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{f}(\vec{u}) + \vec{f}(\vec{v}).$$

Συνεπώς, η απεικόνιση  $\vec{f}$  είναι γραμμική.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι ο ορισμός της  $\vec{f}$  είναι ανεξάρτητος του  $a$ . Ας είναι λοιπόν  $b \in \mathcal{E}$  με  $a \neq b$ . Έχουμε:

$$b + \vec{v} = a + \overrightarrow{ab} + \vec{v} = a + \overrightarrow{a(a + \vec{v})} - \overrightarrow{aa} + \overrightarrow{ab}.$$

Έτσι, παίρνουμε:

$$b + \vec{v} = (a + \vec{v}) - a + b.$$

Καθώς η  $f$  είναι ομοπαράλληλική απεικόνιση, παίρνουμε:

$$f(b + \vec{v}) = f(a + \vec{v}) - f(a) + f(b).$$

Οπότε, έχουμε:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f(b)f(b + \vec{v})} &= \overrightarrow{f(b)f(a + \vec{v})} - \overrightarrow{f(b)f(a)} + \overrightarrow{f(b)f(b)} \\ &= \overrightarrow{f(a)f(b)} + \overrightarrow{f(b)f(a + \vec{v})} \\ &= \overrightarrow{f(a)f(a + \vec{v})}. \end{aligned}$$

Καθώς  $\overrightarrow{f(b)f(b + \vec{v})} = \overrightarrow{f(a)f(a + \vec{v})}$ , έπεται ότι ο ορισμός της  $\vec{f}$  είναι ανεξάρτητος της επιλογής του  $a \in \mathcal{E}$ . Η μοναδικότητα της  $\vec{f}$  προκύπτει από το γεγονός ότι πρέπει να επαληθεύει την ισότητα  $\vec{f}(\vec{v}) = \overrightarrow{f(a)f(a + \vec{v})}$ .  $\square$

**Παράδειγμα 3.4.** Ας υποθέσουμε ότι  $f : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$  είναι μία ομοπαράλληλική απεικόνιση. Τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 3.1, υπάρχει  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  τέτοιος, ώστε να ισχύει

$$f(x) = f(0) + Ax, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{A}^n.$$

Από το Παράδειγμα 3.3 έχουμε ότι κάθε απεικόνιση της παραπάνω μορφής είναι ομοπαράλληλική. Άρα, η οικογένεια των απεικονίσεων  $f : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$  με  $f(x) = b + Ax$ , όπου  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  και  $b \in \mathbb{A}^m$ , είναι το σύνολο όλων των ομοπαράλληλικών απεικονίσεων από το  $\mathbb{A}^n$  στο  $\mathbb{A}^m$ .

**Ορισμός 3.2.** Ας είναι  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  μία ομοπαράλληλική απεικόνιση. Τότε, η γραμμική απεικόνιση  $\vec{f}$  καλείται *προσαρτημένη γραμμική απεικόνιση* στην  $f$ .

Παρατηρούμε αμέσως ότι η  $f$  είναι ένεση (αντίστοιχα, έφεση, αμφίεση) αν και μόνον αν η προσαρτημένη της γραμμική απεικόνιση  $\vec{f}$  είναι ένεση (αντίστοιχα, έφεση, αμφίεση).

**Πρόταση 3.2.** Ας είναι  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  μία ομοπαράλληλική απεικόνιση η οποία είναι αμφίεση. Τότε, η αντίστροφη απεικόνιση  $f^{-1} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$  είναι επίσης ομοπαράλληλική.

*Απόδειξη.* Ας είναι  $(b_i, \lambda_i)$  ( $i = 0, \dots, n$ ) βεβαρημένα σημεία του  $\mathcal{F}$  με  $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1$ . Τότε, υπάρχουν σημεία  $a_i \in \mathcal{E}$  ( $i = 0, \dots, n$ ) με  $f(a_i) = b_i$ . Έχουμε:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\lambda_0 b_0 + \dots + \lambda_n b_n) &= f^{-1}(\lambda_0 f(a_0) + \dots + \lambda_n f(a_n)) \\ &= f^{-1}(f(\lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_n a_n)) \\ &= \lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_n a_n \\ &= \lambda_0 f^{-1}(b_0) + \dots + \lambda_n f^{-1}(b_n). \end{aligned}$$

Άρα, η  $f^{-1}$  είναι ομοπαράλληλική απεικόνιση.  $\square$

**Ορισμός 3.3.** Μία ομοπαράλληλη απεικόνιση  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  η οποία είναι αμφίεση καλείται *ομοπαράλληλος ισομορφισμός*. Τότε, οι χώροι  $\mathcal{E}$  και  $\mathcal{F}$  καλούνται *ομοπαράλληλώς ισόμορφοι*. Αν  $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ , τότε η  $f$  καλείται *ομοπαράλληλος αυτομορφισμός*.

**Πρόταση 3.3.** Ας είναι  $a \in \mathcal{E}$ . Τότε, οι απεικονίσεις

$$\Psi_a : \mathcal{E} \longrightarrow \vec{\mathcal{E}}, b \longmapsto \vec{ab}$$

και

$$\Phi_a : \vec{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}, \vec{u} \longmapsto a + \vec{u}$$

είναι ομοπαράλληλοι ισομορφισμοί. Επομένως, τα σύνολα  $\mathcal{E}$  και  $\vec{\mathcal{E}}$  είναι ισόμορφοι ομοπαράλληλοι χώροι.

*Απόδειξη.* Από την Πρόταση 1.1 έχουμε ότι οι απεικονίσεις  $\Psi_a$  και  $\Phi_a$  είναι αμφιέσεις με  $\Psi_a = \Phi_a^{-1}$ . Θα δείξουμε ότι η  $\Phi_a$  είναι ομοπαράλληλη απεικόνιση. Ας είναι λοιπόν  $(\vec{v}_i, \lambda_i)$  ( $i = 0, \dots, n$ ) βεβαρημένα σημεία του  $\vec{\mathcal{E}}$  με  $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1$ . Τότε, έχουμε:

$$\begin{aligned} \Phi_a(\lambda_0 \vec{v}_0 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n) &= a + \lambda_0 \vec{v}_0 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n \\ &= \lambda_0(a + \vec{v}_0) + \dots + \lambda_n(a + \vec{v}_n) \\ &= \lambda_0 \Phi_a(\vec{v}_0) + \dots + \lambda_n \Phi_a(\vec{v}_n). \end{aligned}$$

’ρα, η  $\Phi_a$  είναι ομοπαράλληλη απεικόνιση. Από την Πρόταση 3.2 έχουμε ότι η απεικόνιση  $\Psi_a$  είναι επίσης ομοπαράλληλη.  $\square$

**Πρόταση 3.4.** Ας είναι  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  μία ομοπαράλληλη απεικόνιση. Αν  $\mathcal{V}$  είναι ένας ομοπαράλληλος υποχώρος του  $\mathcal{E}$ , τότε το σύνολο  $f(\mathcal{V})$  είναι ένας ομοπαράλληλος υποχώρος του  $\mathcal{F}$  με κατεύθυνση  $\vec{f}(\vec{\mathcal{V}})$ . Επίσης, αν  $\mathcal{W}$  είναι ένας ομοπαράλληλος υποχώρος του  $\mathcal{F}$  με  $f^{-1}(\mathcal{W}) \neq \emptyset$ , τότε το σύνολο  $f^{-1}(\mathcal{W})$  είναι ένας ομοπαράλληλος υποχώρος του  $\mathcal{E}$  με κατεύθυνση  $\vec{f}^{-1}(\vec{\mathcal{W}})$ .

*Απόδειξη.* Ας είναι  $a \in \mathcal{V}$ . Τότε, από την Πρόταση 1.8, έχουμε  $\mathcal{V} = a + \vec{\mathcal{V}}$ . Οπότε, για κάθε  $\vec{v} \in \vec{\mathcal{V}}$  έχουμε  $f(a + \vec{v}) = f(a) + \vec{f}(\vec{v})$  και επομένως ισχύει  $f(\mathcal{V}) \subseteq f(a) + \vec{f}(\vec{\mathcal{V}})$ . Από την άλλη πλευρά, για κάθε σημείο  $f(a) + \vec{y}$  με  $\vec{y} \in \vec{f}(\vec{\mathcal{V}})$ , υπάρχει  $\vec{x} \in \vec{\mathcal{V}}$  με  $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$ , και επομένως παίρνουμε:

$$f(a + \vec{x}) = f(a) + \vec{f}(\vec{x}) = f(a) + \vec{y}.$$

’ρα,  $f(a) + \vec{y} \in f(\mathcal{V})$ . Συνεπώς, ισχύει  $f(\mathcal{V}) = f(a) + \vec{f}(\vec{\mathcal{V}})$ . Σύμφωνα με την Πρόταση 1.7, το σύνολο  $f(a) + \vec{f}(\vec{\mathcal{V}})$  είναι ομοπαράλληλος υποχώρος του  $\mathcal{F}$ . Άρα, το σύνολο  $f(\mathcal{V})$  είναι ένας ομοπαράλληλος υποχώρος του  $\mathcal{F}$  με κατεύθυνση  $\vec{f}(\vec{\mathcal{V}})$ .

Ας είναι  $a \in \mathcal{E}$  με  $f(a) \in \mathcal{W}$ . Τότε  $\mathcal{W} = f(a) + \vec{\mathcal{W}}$ . Θεωρούμε τον ομοπαράλληλο υποχώρο  $\mathcal{W}' = a + \vec{f}^{-1}(\vec{\mathcal{W}})$  του  $\mathcal{E}$ . Αν  $x \in \mathcal{W}'$ , τότε  $x = a + \vec{v}$  με  $\vec{v} \in \vec{f}^{-1}(\vec{\mathcal{W}})$ . ’ρα,  $f(x) = f(a) + \vec{f}(\vec{v}) \in \mathcal{W}$ , και επομένως  $x \in f^{-1}(\mathcal{W})$ . Συνεπώς, έχουμε  $\mathcal{W}' \subseteq f^{-1}(\mathcal{W})$ . Αντιστρόφως, ας είναι  $x \in f^{-1}(\mathcal{W})$ . Τότε  $x = a + \vec{w}$ , όπου  $\vec{w} \in \vec{\mathcal{E}}$ , και επομένως  $f(a) + \vec{f}(\vec{w}) \in \mathcal{W}$ . Οπότε, καθώς  $\mathcal{W} = f(a) + \vec{\mathcal{W}}$ , παίρνουμε  $\vec{f}(\vec{w}) \in \vec{\mathcal{W}}$ , και κατά συνέπεια  $x \in \mathcal{W}'$ . ’ρα, έχουμε  $f^{-1}(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{W}'$ . Έτσι, συμπεραίνουμε ότι  $f^{-1}(\mathcal{W}) = a + \vec{f}^{-1}(\vec{\mathcal{W}})$ .  $\square$

**Πρόταση 3.5.** Ας είναι  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  και  $g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  ομοπαράλληλες απεικονίσεις. Τότε σύνθεση  $g \circ f$  είναι ομοπαράλληλη απεικόνιση και ισχύει  $\overline{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$ .

*Απόδειξη.* Ας είναι  $a \in \mathcal{E}$  και  $\vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}$ . Τότε, έχουμε:

$$g(f(a + \vec{v})) = g(f(a) + \vec{f}(\vec{v})) = g(f(a)) + \vec{g}(\vec{f}(\vec{v})).$$

Επομένως, ισχύει:

$$(g \circ f)(a + \vec{v}) = (g \circ f)(a) + (\vec{g} \circ \vec{f})(\vec{v}).$$

Άρα, η  $g \circ f$  είναι ομοπαράλληλη απεικόνιση και ισχύει  $\overline{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$ .  $\square$



**Ορισμός 3.4.** Μία ομοπαράλληλική απεικόνιση  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  τέτοια ώστε  $\vec{f} = I_{\vec{\mathcal{E}}}$  καλείται μετατόπιση.

**Πρόταση 3.6.** Ας είναι  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  μία μετατόπιση. Τότε, υπάρχει  $\vec{w} \in \vec{\mathcal{E}}$  έτσι, ώστε  $f(x) = x + \vec{w}$ , για κάθε  $x \in \mathcal{E}$ .

*Απόδειξη.* Ας είναι  $a \in \mathcal{E}$ . Τότε, για κάθε  $x \in \mathcal{E}$ , έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + I_{\vec{\mathcal{E}}}(\overrightarrow{ax}) \\ &= f(a) + \overrightarrow{ax} \\ &= x + \overrightarrow{xf(a)} + \overrightarrow{ax} \\ &= x + \overrightarrow{xa} + \overrightarrow{af(a)} + \overrightarrow{ax} \\ &= x + \overrightarrow{xa} + \overrightarrow{af(a)} - \overrightarrow{xa} \\ &= x + \overrightarrow{af(a)}. \end{aligned}$$

Δηλαδή, η  $f$  μετατοπίζει τα σημεία του  $\mathcal{E}$  κατά το διάνυσμα  $\overrightarrow{af(a)}$ . Αν επιλέξουμε  $b \in \mathcal{E}$  με  $b \neq a$ , τότε ομοίως παίρνουμε  $f(x) = x + \overrightarrow{bf(b)}$ . Έτσι, έχουμε  $\overrightarrow{af(a)} = \overrightarrow{bf(b)}$  και επομένως βλέπουμε ότι το διάνυσμα  $\overrightarrow{af(a)}$  δεν εξαρτάται από το  $a$ .  $\square$

**Πρόταση 3.7.** Ας είναι  $(\mathcal{E}, \vec{\mathcal{E}}, +)$  και  $(\mathcal{F}, \vec{\mathcal{F}}, +)$  δύο ομοπαράλληλικοί χώροι. Αν  $(a_0, \dots, a_n)$  είναι ομοπαράλληλικό πλαίσιο του  $\mathcal{E}$  και  $b_0, \dots, b_n \in \mathcal{F}$ , τότε υπάρχει μία μοναδική ομοπαράλληλική απεικόνιση  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  τέτοια, ώστε  $f(a_0) = b_0, \dots, f(a_n) = b_n$ .

*Απόδειξη.* Από την Πρόταση Α.13 έχουμε ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση  $\vec{f} : \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \vec{\mathcal{F}}$  τέτοια, ώστε  $\vec{f}(\overrightarrow{a_0a_i}) = \overrightarrow{b_0b_i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Θεωρούμε την ομοπαράλληλική απεικόνιση  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  η οποία ορίζεται από τη σχέση

$$f(a_0 + \vec{v}) = b_0 + \vec{f}(\vec{v}), \quad \text{για κάθε } \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}.$$

Για κάθε  $i = 1, \dots, n$ , έχουμε:

$$\begin{aligned} f(a_i) &= f(a_0 + \overrightarrow{a_0a_i}) \\ &= b_0 + \vec{f}(\overrightarrow{a_0a_i}) \\ &= b_0 + \overrightarrow{b_0b_i} \\ &= b_i. \end{aligned}$$

Επίσης, ισχύει  $f(a_0) = b_0 + \vec{f}(\vec{0}) = b_0$ .

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η απεικόνιση  $f$  είναι μοναδική. Ας είναι λοιπόν  $g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  μία ομοπαράλληλική απεικόνιση τέτοια, ώστε  $g(a_0) = b_0, \dots, g(a_n) = b_n$ . Τότε, για κάθε  $z \in \mathcal{E}$  υπάρχει μοναδική  $n+1$ -άδα  $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  με  $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1$  έτσι, ώστε  $z = \lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_n a_n$ . Οπότε, έχουμε:

$$g(z) = \lambda_0 g(a_0) + \dots + \lambda_n g(a_n) = \lambda_0 f(a_0) + \dots + \lambda_n f(a_n) = f(z).$$

Άρα,  $f = g$  και επομένως η απεικόνιση  $f$  είναι μοναδική.  $\square$

**Πόρισμα 3.1.** Κάθε δύο ομοπαράλληλικοί χώροι ίδιας πεπερασμένης διάστασης είναι ομοπαράλληλικά ισόμορφοι.

*Απόδειξη.* Ας είναι  $(\mathcal{E}, \vec{\mathcal{E}}, +)$  και  $(\mathcal{F}, \vec{\mathcal{F}}, +)$  δύο ομοπαράλληλικοί χώροι διάστασης  $n < \infty$ . Θεωρούμε ένα ομοπαράλληλικό πλαίσιο  $(a_0, \dots, a_n)$  του  $\mathcal{E}$  και ένα ομοπαράλληλικό πλαίσιο  $(b_0, \dots, b_n)$  του  $\mathcal{F}$ . Από την Πρόταση 3.7 έπεται ότι υπάρχει μία μοναδική ομοπαράλληλική απεικόνιση  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  τέτοια, ώστε  $f(a_0) = b_0, \dots, f(a_n) = b_n$ . Τότε,  $(\overrightarrow{a_0a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0a_n})$  και  $(\overrightarrow{b_0b_1}, \dots, \overrightarrow{b_0b_n})$  είναι βάσεις των  $\vec{\mathcal{E}}$  και  $\vec{\mathcal{F}}$ , αντίστοιχα, και ισχύει  $\overrightarrow{b_0b_i} = \vec{f}(\overrightarrow{a_0a_i})$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Τότε, η  $\vec{f}$  είναι ισομορφισμός και επομένως αμφίεση. Άρα, η  $f$  είναι αμφίεση και κατά συνέπεια ομοπαράλληλικά ισόμορφοι.  $\square$

**Πόρισμα 3.2.** Κάθε ομοπαράλληλικός χώρος πεπερασμένης διάστασης  $n$  είναι ομοπαράλληλικά ισόμορφος με τον χώρο  $\mathbb{A}^n$ .

**Παράδειγμα 3.5.** Θεωρούμε τον ομοπαράλληλικό χώρο  $\mathcal{P}$  του Παραδείγματος 1.5. Τα σημεία  $a_0 = (0, 0, 0)$ ,  $a_1 = (1, 0, 1)$  και  $a_2 = (0, 1, 1)$  αποτελούν ένα ομοπαράλληλικό πλαίσιο του  $\mathcal{P}$ , καθώς ισχύει

$$\overrightarrow{a_0 a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{a_0 a_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ας είναι  $b_0 = (1, 1)$ ,  $b_1 = (3, 2)$  και  $b_2 = (-1, -2)$  τρία σημεία του  $\mathbb{A}^2$ . Θα κατασκευάσουμε τη μοναδική ομοπαράλληλική απεικόνιση  $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{A}^2$  με  $f(a_i) = b_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ).

Έχουμε:

$$\overrightarrow{b_0 b_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{b_0 b_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Η μοναδική γραμμική απεικόνιση  $\vec{f}$  τέτοια, ώστε  $\vec{f}(\overrightarrow{a_0 a_i}) = \overrightarrow{b_0 b_i}$  ( $i = 1, 2$ ) ορίζεται από τη σχέση

$$\vec{f} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 \\ x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{για κάθε } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Έτσι, η ζητούμενη απεικόνιση  $f$  δίνεται από τη σχέση

$$f(x_1, x_2, x_3) = (1, 1) + \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 \\ x_1 - 3x_2 \end{pmatrix} = (2x_1 - 2x_2 + 1, x_1 - 3x_2 + 1).$$

Στη συνέχεια θα δούμε πως με τη χρήση ομοπαράλληλικών πλαισίων μπορούμε να παραστήσουμε τις ομοπαράλληλικές απεικονίσεις με πίνακες. Ας είναι  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  μία ομοπαράλληλική απεικόνιση και  $(a_0, \dots, a_n)$ ,  $(b_0, \dots, b_m)$  ομοπαράλληλικά πλαίσια των  $\mathcal{E}$  και  $\mathcal{F}$ , αντίστοιχα. Έχουμε:

$$f(a_0 + \vec{v}) = f(a_0) + \vec{f}(\vec{v}), \quad \text{για κάθε } \vec{v} \in \mathcal{E}.$$

Άρα, για κάθε  $\vec{v} \in \mathcal{E}$  ισχύει

$$\vec{f}(\vec{v}) = \overrightarrow{f(a_0) f(a_0 + \vec{v})},$$

απ' όπου έπεται

$$\vec{f}(\vec{v}) = \overrightarrow{f(a_0) b_0} + \overrightarrow{b_0 f(a_0 + \vec{v})}.$$

Επομένως, για κάθε  $\vec{v} \in \mathcal{E}$  έχουμε:

$$\overrightarrow{b_0 f(a_0 + \vec{v})} = \overrightarrow{b_0 f(a_0)} + \vec{f}(\vec{v}).$$

Καθώς  $(\overrightarrow{a_0 a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0 a_n})$  και  $(\overrightarrow{b_0 b_1}, \dots, \overrightarrow{b_0 b_m})$  είναι βάσεις των  $\mathcal{E}$  και  $\mathcal{F}$  αντίστοιχα, έχουμε:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= x_1 \overrightarrow{a_0 a_1} + \dots + x_n \overrightarrow{a_0 a_n}, \\ \overrightarrow{b_0 f(a_0)} &= \beta_1 \overrightarrow{b_0 b_1} + \dots + \beta_m \overrightarrow{b_0 b_m}, \\ \overrightarrow{b_0 f(a_0 + \vec{v})} &= y_1 \overrightarrow{b_0 b_1} + \dots + y_m \overrightarrow{b_0 b_m}, \end{aligned}$$

όπου  $x_i, y_j, \beta_j \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ ). Συμβολίζουμε με  $A$  τον πίνακα της γραμμικής απεικόνισης  $\vec{f}$  ως προς τις βάσεις  $(\overrightarrow{a_0 a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0 a_n})$  και  $(\overrightarrow{b_0 b_1}, \dots, \overrightarrow{b_0 b_m})$ . Επίσης, θέτουμε:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}.$$

Έτσι, έχουμε:

$$Y = AX + B.$$

Συνεπώς, οι Καρτεσιανές συντεταγμένες του  $f(a_0 + \vec{v})$  ως προς το ομοπαράλληλικό πλαίσιο  $(b_0, \dots, b_m)$  δίνονται από τις Καρτεσιανές συντεταγμένες του  $a_0 + \vec{v}$  ως προς το ομοπαράλληλικό πλαίσιο  $(a_0, \dots, a_n)$  με τη βοήθεια του πίνακα  $A$  και του διανύσματος  $B$ .

### 3.2 Ομοπαράλληλικές Ομάδες

Ας είναι  $(\mathcal{E}, \vec{\mathcal{E}}, +)$  ένας ομοπαράλληλικός χώρος. Συμβολίζουμε με  $GA(\mathcal{E})$  το σύνολο των ομοπαράλληλικών αυτομορφισμών  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ . Από την Πρόταση 3.5 έπεται ότι για κάθε  $f, g \in GA(\mathcal{E})$  έχουμε  $g \circ f \in GA(\mathcal{E})$ . Η σύνθεση απεικονίσεων είναι προσεταιριστική πράξη. Επίσης η ταυτοτική απεικόνιση  $I_{\mathcal{E}}$  ανήκει στο  $GA(\mathcal{E})$ . Τέλος, από την Πρόταση 3.2 έπεται ότι για κάθε  $f \in GA(\mathcal{E})$  έχουμε  $f^{-1} \in GA(\mathcal{E})$ . Συνεπώς, το σύνολο  $GA(\mathcal{E})$  εφοδιασμένο με τη σύνθεση απεικονίσεων αποτελεί ομάδα.

Θεωρούμε την ομάδα  $GL(\vec{\mathcal{E}})$  των αυτομορφισμών του διανυσματικού χώρου  $\vec{\mathcal{E}}$  και ορίζουμε την απεικόνιση

$$\Lambda : GA(\mathcal{E}) \longrightarrow GL(\vec{\mathcal{E}}), f \longmapsto \vec{f}.$$

Από την Πρόταση 3.5 έχουμε:

$$\Lambda(g \circ f) = \overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f} = \Lambda(g) \circ \Lambda(f).$$

Επομένως, η απεικόνιση  $\Lambda$  είναι μορφισμός ομάδων. Ο πυρήνας του μορφισμού  $\Lambda$  αποτελείται από όλες τις απεικονίσεις  $f \in GA(\mathcal{E})$  με  $\vec{f} = I_{\vec{\mathcal{E}}}$ , δηλαδή τις μετατοπίσεις.

Θέτουμε  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Το σύνολο των αυτομορφισμών του  $\vec{\mathcal{E}}$  της μορφής  $\lambda Id_{\vec{\mathcal{E}}}$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , αποτελεί μία υποομάδα της  $GL(\vec{\mathcal{E}})$  η οποία συμβολίζεται με  $\mathbb{R}^* Id_{\vec{\mathcal{E}}}$ . Η αντίστροφη εικόνα της  $DIL(\mathcal{E}) = \Lambda^{-1}(\mathbb{R}^* Id_{\vec{\mathcal{E}}})$  είναι υποομάδα της  $GA(\mathcal{E})$ .

**Ορισμός 3.5.** Τα στοιχεία της υποομάδας  $DIL(\mathcal{E})$  καλούνται *διαστολές* του  $\mathcal{E}$ .

Μία σημαντική οικογένεια ομοπαράλληλικών απεικονίσεων που θα μας βοηθήσει να περιγράψουμε την ομάδα των διαστολών δίνουμε παρακάτω.

**Ορισμός 3.6.** Καλούμε *ομοθεσία κέντρου*  $a \in \mathcal{E}$  και *λόγου*  $\lambda \in \mathbb{R}$  την απεικόνιση που ορίζεται από τη σχέση

$$H_{a,\lambda}(x) = a + \lambda \vec{ax}, \text{ για κάθε } x \in \mathcal{E}.$$

Παρατηρούμε ότι  $H_{a,\lambda}(a) = a$ , δηλαδή το σημείο  $a$  είναι σταθερό σημείο της απεικόνισης  $H_{a,\lambda}$ . Αν  $\lambda = 1$ , τότε  $H_{a,1} = Id_{\mathcal{E}}$ . Αν  $\lambda = 0$ , τότε  $H_{a,0}(x) = a$ , για κάθε  $x \in \mathcal{E}$ , και επομένως η  $H_{a,0}$  είναι σταθερή απεικόνιση. Στην περίπτωση όπου  $\lambda \neq 1$ , η  $H_{a,\lambda}$  δεν συμπίπτει ποτέ με μία μετατόπιση, γιατί έχει σταθερό σημείο. Επίσης, για κάθε  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , ισχύει:

$$H_{a,\lambda} \circ H_{a,\mu} = H_{a,\lambda\mu}.$$

Πράγματι, για κάθε  $x \in \mathcal{E}$ , έχουμε:

$$(H_{a,\lambda} \circ H_{a,\mu})(x) = H_{a,\lambda}(a + \mu \vec{ax}) = a + \lambda\mu \vec{ax} = H_{a,\lambda\mu}(x).$$

**Πρόταση 3.8.** Ας είναι  $f \in GA(\mathcal{E})$  με  $\vec{f} = \lambda Id_{\vec{\mathcal{E}}}$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ . Τότε, υπάρχει ένα μοναδικό σημείο  $c \in \mathcal{E}$  τέτοιο, ώστε  $f = H_{c,\lambda}$ .

*Απόδειξη.* Ας είναι  $a \in \mathcal{E}$ . Τότε, για κάθε  $x \in \mathcal{E}$ , έχουμε:

$$f(x) = f(a + \vec{ax}) = f(a) + \vec{f}(\vec{ax}) = f(a) + \lambda \vec{ax}.$$

Έτσι, υπάρχει  $c \in \mathcal{E}$  τέτοιο, ώστε  $f(c) = c$  αν και μόνον αν ισχύει

$$f(a) + \lambda \vec{ac} = c$$

που ισοδυναμεί με

$$\overrightarrow{f(a)c} = \lambda \vec{ac}$$

ή

$$\overrightarrow{f(a)a} + \overline{a\vec{c}} = \lambda \overline{a\vec{c}}$$

ή

$$\overline{a\vec{c}} = \frac{1}{1-\lambda} \overrightarrow{af(a)}$$

ή

$$c = \frac{1}{1-\lambda} f(a) - \frac{\lambda}{1-\lambda} a.$$

Παίρνοντας  $a = c$ , προκύπτει:

$$f(x) = c + \lambda \overline{c\vec{x}}.$$

Συνεπώς, έχουμε  $f = H_{c,\lambda}$ . □

**Πόρισμα 3.3.** Τα διακεκριμένα στοιχεία της ομάδας  $DIL(\mathcal{E})$  είναι οι ομοθεσίες  $H_{a,\lambda}$  με  $\lambda \neq 0, 1$ , και οι μετατοπίσεις.

Τέλος, θα δώσουμε έναν γεωμετρικό χαρακτηρισμό των διαστολών του  $\mathcal{E}$ . Γι' αυτό τον σκοπό θα χρειαστούμε το παρακάτω λήμμα:

**Λήμμα 3.1.** Ας είναι  $\sigma$  ένας ενδομορφισμός του  $\vec{\mathcal{E}}$  τέτοιος, ώστε για κάθε  $\vec{x} \in \vec{\mathcal{E}}$  υπάρχει  $\nu(\vec{x}) \in \mathbb{R}$  τέτοιο, ώστε  $\sigma(\vec{x}) = \nu(\vec{x})\vec{x}$ . Τότε, υπάρχει  $\mu \in \mathbb{R}$ , έτσι, ώστε  $\sigma(\vec{x}) = \mu\vec{x}$ , για κάθε  $\vec{x} \in \vec{\mathcal{E}}$ .

*Απόδειξη.* Ας είναι  $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{\mathcal{E}} \setminus \{0\}$ . Υποθέτουμε πρώτα ότι τα διανύσματα  $\vec{x}$  και  $\vec{y}$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Έχουμε  $\sigma(x + y) = \sigma(x) + \sigma(y)$ , απ' όπου παίρνουμε

$$\nu(\vec{x} + \vec{y})(\vec{x} + \vec{y}) = \nu(\vec{x})\vec{x} + \nu(\vec{y})\vec{y}$$

ή ισοδύναμα

$$(\nu(\vec{x} + \vec{y}) - \nu(\vec{x}))\vec{x} + (\nu(\vec{x} + \vec{y}) - \nu(\vec{y}))\vec{y} = 0.$$

Έτσι, καθώς τα  $\vec{x}$  και  $\vec{y}$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, προκύπτει:

$$\nu(\vec{x}) = \nu(\vec{x} + \vec{y}) = \nu(\vec{y}).$$

Ας υποθέσουμε στη συνέχεια ότι  $\vec{y} = k\vec{x}$ , όπου  $k \in \mathbb{R}^*$ . Τότε, έχουμε  $\sigma(\vec{y}) = k\sigma(\vec{x})$ , απ' όπου  $\nu(\vec{y})k\vec{x} = k\nu(\vec{x})\vec{x}$  και επομένως  $\nu(\vec{y}) = \nu(\vec{x})$ .

Καθώς είδαμε παραπάνω υπάρχει  $\mu \in \mathbb{R}^*$  τέτοιο, ώστε για κάθε  $x \in \vec{\mathcal{E}} \setminus \{0\}$  έχουμε  $\sigma(\vec{x}) = \mu\vec{x}$ . Επίσης, ισχύει  $\sigma(\vec{0}) = \vec{0}$ . 'ρα, έχουμε  $\sigma = \mu Id_{\vec{\mathcal{E}}}$ . □

**Πρόταση 3.9.** Ας είναι  $f \in GA(\mathcal{E})$ . Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- (α)  $H f$  είναι μία διαστολή.
- (β) Κάθε ομοπαράλληλικός υποχώρος  $\mathcal{V}$  του  $\mathcal{E}$  είναι παράλληλος προς τον  $f(\mathcal{V})$ .
- (γ) Κάθε ευθεία  $\mathcal{L}$  του  $\mathcal{E}$  είναι παράλληλη προς την  $f(\mathcal{L})$ .

*Απόδειξη.* Ας υποθέσουμε ότι ισχύει η (α), δηλαδή ότι η  $f$  είναι μία διαστολή. Αν  $\mathcal{V}$  είναι ομοπαράλληλικός υποχώρος του  $\mathcal{E}$ , τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 3.4, το σύνολο  $f(\mathcal{V})$  είναι υπόχωρος του  $\mathcal{E}$  με κατεύθυνση  $\vec{f}(\vec{\mathcal{V}})$ . Η  $f$  είναι μία διαστολή και επομένως  $\vec{f} = \lambda Id_{\vec{\mathcal{E}}}$ . Έτσι, έχουμε  $\vec{f}(\vec{\mathcal{V}}) = \vec{\mathcal{V}}$  και κατά συνέπεια οι χώροι  $\mathcal{V}$  και  $f(\mathcal{V})$  είναι παράλληλοι. Επομένως, ισχύει η (β).

Η απόδειξη της συνεπαγωγής (β)  $\Rightarrow$  (γ) είναι τετριμμένη.

Τέλος, ας υποθέσουμε ότι ισχύει η (γ). Ας είναι  $\vec{x} \in \vec{\mathcal{E}} \setminus \{0\}$ . Θεωρούμε τον διανυσματικό υποχώρο  $\vec{\mathcal{L}}$  ο οποίος παράγεται από το  $\vec{x}$  και κατόπιν την ευθεία  $\mathcal{L} = a + \vec{\mathcal{L}}$ , όπου  $a \in \mathcal{E}$ . Καθώς ισχύει η (γ), έχουμε  $\vec{f}(\vec{\mathcal{L}}) = \vec{\mathcal{L}}$  και επομένως υπάρχει  $\nu(\vec{x}) \in \mathbb{R}$  τέτοιο, ώστε  $\vec{f}(\vec{x}) = \nu(\vec{x})\vec{x}$ . Στη συνέχεια το Λήμμα 3.1 συνεπάγεται ότι υπάρχει  $\mu \in \mathbb{R}$ , έτσι, ώστε  $\vec{f}(\vec{x}) = \mu\vec{x}$ , για κάθε  $\vec{x} \in \vec{\mathcal{E}}$ . 'ρα, έχουμε  $\vec{f} = \mu Id_{\vec{\mathcal{E}}}$  και επομένως η  $f$  είναι μία διαστολή, δηλαδή ισχύει η (α). □

### 3.3 Ομοπαράλληλικές Μορφές

Ας είναι  $(\mathcal{E}, \vec{\mathcal{E}}, +)$  ένας ομοπαράλληλικός χώρος.

**Ορισμός 3.7.** Καλούμε ομοπαράλληλική μορφή κάθε ομοπαράλληλική απεικόνιση  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{A}$ . Το σύνολο  $f^{-1}(\{0\})$  καλείται πυρήνας της  $f$  και συμβολίζεται με  $\text{Ker } f$ .

Από την Πρόταση 3.4 έπεται ότι το σύνολο  $\text{Ker } f$  είναι ομοπαράλληλικός υποχώρος του  $\mathcal{E}$  με κατεύθυνση  $\text{Ker } \vec{f}$ . Έτσι, αν η  $f$  είναι μη σταθερή, τότε  $\dim \text{Ker } \vec{f} = \dim \vec{\mathcal{E}} - 1$  και επομένως ο χώρος  $\text{Ker } f$  είναι υπερεπίπεδο του  $\mathcal{E}$ .

**Παράδειγμα 3.6.** Ας είναι  $a_1, \dots, a_m, b \in \mathbb{A}$ . Θεωρούμε την απεικόνιση

$$f : \mathbb{A}^m \rightarrow \mathbb{A}, (x_1, \dots, x_m) \mapsto a_1 x_1 + \dots + a_m x_m - b.$$

Η απεικόνιση

$$\vec{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \mapsto a_1 x_1 + \dots + a_m x_m$$

είναι γραμμική και για κάθε  $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{A}^m$  ισχύει:

$$f(x_1, \dots, x_m) = -b + \vec{f} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = f(0, \dots, 0) + \vec{f} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Άρα, η απεικόνιση  $f$  είναι μία ομοπαράλληλική μορφή. Ο πυρήνας της  $f$  είναι το σύνολο

$$H = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{A}^m / a_1 x_1 + \dots + a_m x_m = b\}$$

το οποίο είναι ένα υπερεπίπεδο του  $\mathbb{A}^m$ . Επιπλέον, έχουμε  $H = u + \vec{H}$ , όπου  $u \in H$  και

$$\vec{H} = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{R}^m / a_1 z_1 + \dots + a_m z_m = 0\}.$$

**Πρόταση 3.10.** Ισχύουν τα εξής:

- (α) Για κάθε υπερεπίπεδο  $H$  του  $\mathcal{E}$  υπάρχει μη-σταθερή ομοπαράλληλική μορφή  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{A}$ , τέτοια, ώστε  $H = \text{Ker } f$ . Αν  $g : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{A}$  είναι μία άλλη μη-σταθερή ομοπαράλληλική μορφή με  $H = \text{Ker } g$ , τότε  $f = \lambda g$ , με  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
- (β) Αν  $H$  είναι ένα ομοπαράλληλικό υπερεπίπεδο του  $\mathcal{E}$  και  $f$  μη-σταθερή ομοπαράλληλική μορφή του  $\mathcal{E}$  με  $H = \text{Ker } f$ , τότε για κάθε υπερεπίπεδο  $H'$  παράλληλο με το  $H$  ορίζεται από μία μη-σταθερή ομοπαράλληλική μορφή  $g$  με  $g = f - \lambda$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Απόδειξη.** (α) Ας είναι  $H$  ένα ομοπαράλληλικό υπερεπίπεδο του  $\mathcal{E}$ . Τότε,  $H = a + \vec{H}$ , όπου  $a \in H$  και  $\vec{H}$  είναι υπερεπίπεδο του  $\vec{\mathcal{E}}$ . Καθώς  $\dim \vec{H} = \dim \vec{\mathcal{E}} - 1$ , μία βάση  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_\mu\}$  του  $\vec{H}$  συμπληρώνεται σε μία βάση  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s, \vec{w}\}$  του  $\vec{\mathcal{E}}$ , όπου  $\vec{w} \in \vec{\mathcal{E}} \setminus \vec{H}$ . Έτσι, για κάθε  $y \in \vec{\mathcal{E}}$  υπάρχουν μοναδικοί αριθμοί  $\lambda_1, \dots, \lambda_s, \lambda \in \mathbb{R}$  έτσι, ώστε  $y = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_s \vec{v}_s + \lambda \vec{w}$ . Η αντιστοιχία  $y \mapsto \lambda$  ορίζει μία γραμμική μορφή  $f^* : \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $\text{Ker } f^* = \vec{H}$ . Στη συνέχεια, θεωρούμε  $a \in H$  και ορίζουμε την ομοπαράλληλική μορφή  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{A}$  θέτοντας

$$f(a + \vec{v}) = f^*(\vec{v}), \quad \text{για κάθε } \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}.$$

Καθώς  $f^* \neq 0$ , η  $f$  δεν είναι σταθερή και επιπλέον  $H = \text{Ker } f$ .

Ας είναι τώρα  $g : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{A}$  μία άλλη μη-σταθερή ομοπαράλληλική μορφή με  $H = \text{Ker } g$ . Τότε, για κάθε  $a \in H$  ισχύει

$$g(a + \vec{v}) = \vec{g}(\vec{v}), \quad \text{για κάθε } \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}.$$

Ας είναι  $\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_s \vec{v}_s + \lambda \vec{w}$ , με  $\lambda_1, \dots, \lambda_s, \lambda \in \mathbb{R}$ . Καθώς  $\vec{H} = \text{Ker} \vec{g}$ , έχουμε:

$$\vec{g}(\vec{v}) = \lambda \vec{g}(w) = \vec{g}(w) f^*(\vec{v})$$

και  $g(\vec{w}) \neq 0$ . Θέτουμε  $c = g(\vec{w})$  και έχουμε  $g(v) = cf(v)$ , για κάθε  $v \in \mathcal{E}$ .

(β) Ας είναι  $H$  ένα ομοπαράλληλικό υπερεπίπεδο του  $\mathcal{E}$  και  $f$  μία μη-σταθερή ομοπαράλληλική μορφή του  $\mathcal{E}$  με  $H = \text{Ker} f$ . Θεωρούμε ένα υπερεπίπεδο του  $H'$  παράλληλο με το  $H$ . Επομένως, έχουμε  $H' = b + \text{Ker} \vec{f}$ , όπου  $b \in H'$ . Αν  $x \in H'$ , τότε  $x = b + \vec{v}$ , όπου  $\vec{v} \in \text{Ker} \vec{f}$ . Άρα,  $f(x) = f(b)$  και επομένως  $x \in \text{Ker}(f - f(b))$ . Έτσι, έχουμε  $H' \subseteq \text{Ker}(f - f(b))$ . Αντιστρόφως, έχουμε  $b \in \text{Ker}(f - f(b))$  και επομένως αν  $x \in \text{Ker}(f - f(b))$ , τότε  $x = b + \vec{w}$ , όπου  $\vec{w} \in \vec{\mathcal{E}}$ . Καθώς  $x \in \text{Ker}(f - f(b))$ , έχουμε  $f(x) = f(b)$  και επομένως

$$f(b) = f(x) = f(b) + \vec{f}(\vec{w}),$$

απ' όπου  $\vec{f}(\vec{w}) = 0$ . Άρα  $\vec{w} \in \text{Ker} \vec{f}$  και κατά συνέπεια  $x \in H'$ . Επομένως, ισχύει  $H' = \text{Ker}(f - f(b))$ .  $\square$

### 3.4 Ασκήσεις-Εργασίες

#### Ασκήσεις

**3.4.1** Ας είναι  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  μία ομοπαράλληλική απεικόνιση η οποία είναι ένεση και  $a, b, c$  τρία διαφορετικά σημεία του  $\mathcal{E}$  τα οποία είναι συννευθιακά. Ναδειχθεί ότι τα σημεία  $f(a), f(b)$  και  $f(c)$  είναι επίσης συννευθιακά.

**3.4.2** Ας είναι  $(\mathcal{E}, \vec{\mathcal{E}}, +)$  ένας ομοπαράλληλικός χώρος και  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  μία αμφίεση. Η  $f$  είναι μετατόπιση, αν και μόνον αν, για κάθε  $a, b \in \mathcal{E}$  ισχύει:

$$f(b) = b + f(a) - a.$$

**3.4.3** Ας είναι  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  μία ομοπαράλληλική απεικόνιση. Θεωρούμε το σύνολο των σταθερών σημείων της  $f$ ,

$$\text{Fix}(f) = \{x \in \mathcal{E} / f(x) = x\}.$$

Αν  $\text{Fix}(f) \neq \emptyset$ , τότε ναδειχθεί ότι  $\text{Fix}(f) = a + \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{\mathcal{E}}})$ .

**3.4.4** Ας είναι  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  μία ομοπαράλληλική απεικόνιση. Ναδειχθεί ότι η  $f$  έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο, αν και μόνον αν, το 1 δεν είναι ιδιοτιμή της γραμμικής απεικόνισης  $\vec{f}$ .

**3.4.5** Ας είναι  $(\mathcal{E}, \vec{\mathcal{E}}, +)$  ένας ομοπαράλληλικός χώρος. Ένα υποσύνολο  $\mathcal{C}$  του  $\mathcal{E}$  καλείται *κυρτό*, αν για κάθε  $a, b \in \mathcal{C}$  ισχύει  $[ab] \subseteq \mathcal{C}$ .

(α) Ναδειχθεί ότι κάθε ομοπαράλληλικός υποχώρος του  $\mathcal{E}$  είναι κυρτό υποσύνολο του  $\mathcal{E}$ .

(β) Ναδειχθεί ότι η τομή δύο κυρτών υποσυνόλων είναι κυρτό υποσύνολο.

(γ) Ναδοθεί ένα σύνολο του  $\mathbb{A}^2$  το οποίο δεν είναι κυρτό. Κατόπιν ναδοθούν δύο κυρτά υποσύνολα του  $\mathbb{A}^2$  τέτοια, ώστε η ένωσή τους να μην είναι κυρτό σύνολο.

(δ) Ναδειχθεί ότι ένα υποσύνολο  $\mathcal{C}$  του  $\mathcal{E}$  είναι κυρτό, αν και μόνον αν, για κάθε πεπερασμένη οικογένεια βεβαρημένων σημείων  $(a_i, \lambda_i)$  ( $i = 1, \dots, k$ ) με  $\lambda_i > 0$  και  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$  έχουμε  $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k \in \mathcal{C}$ .

(ε) Αν  $a_0, \dots, a_n \in \mathcal{E}$ , τότε ναδειχθεί ότι το μικρότερο κυρτό σύνολο που περιέχει τα σημεία  $a_0, \dots, a_n$  είναι το κυρτό κάλυμμα των  $a_0, \dots, a_n$ .

(στ) Ας είναι  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  μία ομοπαράλληλική απεικόνιση. Αν  $\mathcal{C}$  είναι ένα κυρτό υποσύνολο του  $\mathcal{E}$ , τότε ναδειχθεί ότι το σύνολο  $f(\mathcal{C})$  είναι κυρτό. Επίσης, αν  $\mathcal{D}$  είναι ένα κυρτό υποσύνολο του  $\mathcal{F}$  τέτοιο, ώστε  $f^{-1}(\mathcal{D}) \neq \emptyset$ , τότε ναδειχθεί ότι το σύνολο  $f^{-1}(\mathcal{D})$  είναι επίσης κυρτό.

3.4.6 Ας είναι  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{E}$  μία ομοπαράλληλική απεικόνιση. Να δειχθούν τα εξής:

(α) Αν  $f \circ f = f$ , τότε η  $f$  έχει σταθερό σημείο.

(β) Αν  $f \circ f = I_{\mathcal{E}}$ , τότε η  $f$  έχει σταθερό σημείο.

3.4.7 Ας είναι  $\mathcal{V}$  ο ομοπαράλληλικός υποχώρος του  $\mathbb{A}^5$  ο οποίος ορίζεται από το σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned}x_1 + x_3 - 2x_5 &= 1 \\x_2 - 2x_4 + x_5 &= -2 \\x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 &= -3.\end{aligned}$$

Να βρεθεί η διάσταση του  $\mathcal{V}$  και μία ομοπαράλληλική απεικόνιση η οποία να απεικονίζει τον  $\mathcal{V}$  επί ενός ομοπαράλληλικού υποχώρου ο οποίος ορίζεται από εξισώσεις  $x_1 = \dots = x_k = 0$ , για κάποιο  $k > 0$  (μέσα σε κάποιο χώρο  $\mathbb{A}^m$ ).

3.4.8 Ας είναι  $\mathbb{E}$  ένας ομοπαράλληλικός χώρος και  $\mathcal{F}$  ένας ομοπαράλληλικός υποχώρος του. Αν  $G$  είναι ένας διανυσματικός χώρος τέτοιος, ώστε  $\vec{\mathbb{E}} = \vec{\mathcal{F}} \oplus G$ , τότε να δειχθεί ότι για κάθε  $M \in \mathcal{E}$  υπάρχει ένα μοναδικό σημείο  $M' \in \vec{\mathcal{F}}$  τέτοιο, ώστε  $\overrightarrow{M'M} \in G$ . Η αντιστοιχία  $M \mapsto M'$  ορίζει μία απεικόνιση  $p : M \rightarrow M'$  η οποία καλείται ομοπαράλληλική προβολή επί του  $\mathcal{F}$  κατά τη διεύθυνση του  $G$ . Να δειχθεί ότι η  $p$  είναι ομοπαράλληλική απεικόνιση.

3.4.9 Θεωρούμε τον χώρο  $\mathbb{A}^3$  και το ομοπαράλληλικό πλαίσιο  $(O, E_1, E_2, E_3)$ , όπου  $O = (0, 0, 0)$ ,  $E_1 = (1, 0, 0)$ ,  $E_2 = (0, 1, 0)$ , και  $E_3 = (0, 0, 1)$ . Ας είναι  $f_1 = (-1, 1, 1)$ ,  $f_2 = (1, -1, 1)$ ,  $f_3 = (1, 1, -1)$ ,  $a = (3, -1, 0)$ ,  $F = \langle f_1, f_2 \rangle$ ,  $G = \langle f_3 \rangle$  και  $\Pi = a + F$ . Συμβολίζουμε με  $p$  την ομοπαράλληλική προβολή επί του  $\Pi$  κατά τη διεύθυνση του  $G$ . Να προσδιοριστούν οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες του  $p(x, y, z)$ , για κάθε  $(x, y, z) \in \mathbb{A}^3$ , ως συνάρτηση των  $x, y, z$ .

3.4.10 Ας είναι  $\mathcal{E}$  ένας ομοπαράλληλικός χώρος διάστασης 2 και  $ABC$  ένα τρίγωνό του. Συμβολίζουμε με  $G$  το σύνολο των ομοπαράλληλικών απεικονίσεων  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  οι οποίες αφήνουν αμετάβλητο το τρίγωνο  $ABC$ , δηλαδή μεταθέτουν τις κορυφές του  $A, B, C$ . Να δειχθεί ότι το σύνολο  $G$  είναι μία ομάδα που αποτελείται από 6 στοιχεία καθένα από τα οποία έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο.

## Βιβλιογραφία

- [1] M. Audin. *Geometry*. Springer, 2003.
- [2] M.K. Bennett. *Affine and Projective Geometry*. John Wiley & Sons, Inc., 1995.
- [3] N. Carter. *Introduction to the Mathematics of Computer Graphics*. Mathematical Association of America, 2016.
- [4] J. Gallier. *Curves and Surfaces in Geometric Modelling: Theory and Algorithms*. San Francisco: The Morgan-Kaufmann Series in Computer Graphics. Morgan-Kaufman Publishers, 1999.
- [5] J. Gallier. *Geometric Methods and Applications*. Springer, 2011.
- [6] Y. Ladegaillerie. *Géométrie, Affine, Projective, Euclidienne et Anallagmatique*. Ellipses, 2003.
- [7] D. Pedoe. *Geometry. A comprehensive course*. Dover, 1988.
- [8] E. Snapper και T. Robert. *Metric Affine Geometry*. Dover, 1989.
- [9] A.R. Tarrida. *Affine Maps, Euclidean Motions and Quadrics*. Springer Verlag, 2011.
- [10] C. Tisseron. *Géométries affines, projectives, et euclidiennes*. first edition. Hermann, 1994.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

---

# ΓΡΑΜΜΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΟΜΟΠΑΡΑΛΛΗΛΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ

---

### Σύνοψη

Σ' αυτό το κεφάλαιο, δεδομένου ενός ομοπαράλληλικού χώρου  $\mathcal{E}$ , παρουσιάζουμε την κατασκευή ενός διανυσματικού χώρου  $\hat{\mathcal{E}}$  μέσα στον οποίο εμφυτεύεται ο χώρος  $\mathcal{E}$  και κάθε ομοπαράλληλική απεικόνιση  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  επεκτείνεται με μοναδικό τρόπο σε μία γραμμική απεικόνιση  $\hat{f} : \hat{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{F}$ . Περισσότερες πληροφορίες για την κατασκευή αυτού του διανυσματικού χώρου καθώς και διαφορετικές κατασκευές, ο αναγνώστης μπορεί να βρει στα συγγράμματα τα οποία παρατίθενται στο τέλος του κεφαλαίου.

### 4.1 Κατασκευή της Γραμμικοποίησης

Ας είναι  $(\mathcal{E}, \vec{\mathcal{E}}, +)$  ένας ομοπαράλληλικός χώρος. Στο Κεφάλαιο 3, είδαμε δύο σημαντικές οικογένειες ομοπαράλληλικών απεικονίσεων, τις μετατοπίσεις και τις ομοθεσίες. Για κάθε  $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}$ , έχουμε τη μετατόπιση  $t_{\vec{u}}$ , με  $t_{\vec{u}}(a) = a + \vec{u}$ , για κάθε  $a \in \mathcal{E}$ , και οι απεικονίσεις αυτής της μορφής είναι όλες οι μετατοπίσεις. Επίσης, για κάθε  $a \in \mathcal{E}$  και  $\lambda \in \mathbb{R}$ , έχουμε την ομοθεσία  $H_{a,\lambda}$ , με  $H_{a,\lambda}(x) = a + \lambda \vec{ax}$ , για κάθε  $x \in \mathcal{E}$ . Επιπλέον, ισχύει:

$$H_{a,1-\lambda}(x) = a + (1 - \lambda)\vec{ax} = a + \vec{ax} - \lambda\vec{ax} = x + \lambda\vec{ax}.$$

Δηλαδή, έχουμε  $H_{a,1-\lambda}(x) = H_{x,\lambda}(a)$ . Θα συμβολίζουμε πιο απλά την ομοθεσία  $H_{a,1-\lambda}$  με  $\langle a, \lambda \rangle$ . Στη συνέχεια, θα παριστάνουμε με αυτό τον τρόπο τις ομοθεσίες. Παρατηρούμε ότι αν  $\lambda \neq 1$ , τότε  $H_{a,\lambda} \neq Id_{\mathcal{E}}$ . Ισοδύναμα, αν  $\lambda \neq 0$ , τότε  $\langle a, \lambda \rangle \neq Id_{\mathcal{E}}$ . Επίσης, όπως έχουμε ήδη δει, μία ομοθεσία  $\langle a, \lambda \rangle$  με  $\lambda \neq 0$  δεν είναι μετατόπιση.

Θεωρούμε τώρα το σύνολο  $\hat{\mathcal{E}}$  το οποίο αποτελείται από τις μετατοπίσεις του  $\mathcal{E}$  και τις ομοθεσίες  $\langle a, \lambda \rangle$  με  $\lambda \neq 0$ . Ας σημειωθεί ότι τα στοιχεία του  $\hat{\mathcal{E}}$  είναι σαφώς διακεκριμένα. Σκοπός μας είναι να δομήσουμε το σύνολο  $\hat{\mathcal{E}}$  σε διανυσματικό χώρο έτσι, ώστε ο χώρος  $\hat{\mathcal{E}}$  να είναι ισόμορφος με έναν υποχώρο του  $\hat{\mathcal{E}}$  και ο χώρος  $\mathcal{E}$  ομοπαράλληλικά ισόμορφος με έναν ομοπαράλληλικό υποχώρο του  $\hat{\mathcal{E}}$ .

Πρώτα θεωρούμε τον εξής νόμο πρόσθεσης στο  $\hat{\mathcal{E}}$ ,  $\hat{+} : \hat{\mathcal{E}} \times \hat{\mathcal{E}} \rightarrow \hat{\mathcal{E}}$ :



(α) Ορίζουμε ως άθροισμα των μετατοπίσεων  $t_{\vec{u}}$  και  $t_{\vec{v}}$ , όπου  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{E}$ , τη μετατόπιση  $t_{\vec{u}+\vec{v}}$ , δηλαδή

$$t_{\vec{u}} \hat{+} t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}.$$

(β) Ορίζουμε ως άθροισμα της ομοθεσίας  $\langle a, \lambda \rangle$  και της μετατόπισης  $t_{\vec{u}}$  την ομοθεσία  $\langle a + \lambda^{-1}\vec{u}, \lambda \rangle$ , δηλαδή

$$\langle a, \lambda \rangle \hat{+} t_{\vec{u}} = \langle a + \lambda^{-1}\vec{u}, \lambda \rangle.$$

Επίσης, ορίζουμε ως άθροισμα της μετατόπισης  $t_{\vec{u}}$  και της ομοθεσίας  $\langle a, \lambda \rangle$  την ίδια ομοθεσία, δηλαδή

$$t_{\vec{u}} \hat{+} \langle a, \lambda \rangle = \langle a + \lambda^{-1}\vec{u}, \lambda \rangle.$$

(γ) Ορίζουμε ως άθροισμα των ομοθεσιών  $\langle a_1, \lambda_1 \rangle$  και  $\langle a_2, \lambda_2 \rangle$  την ομοθεσία

$$\left\langle \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} a_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} a_2, \lambda_1 + \lambda_2 \right\rangle,$$

αν  $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$  και τη μετατόπιση  $t_{\lambda_1 a_2 \vec{a}_1}$ , αν  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ . Δηλαδή, αν  $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ , έχουμε

$$\langle a_1, \lambda_1 \rangle \hat{+} \langle a_2, \lambda_2 \rangle = \left\langle \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} a_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} a_2, \lambda_1 + \lambda_2 \right\rangle,$$

και αν  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ , έχουμε

$$\langle a_1, \lambda_1 \rangle \hat{+} \langle a_2, \lambda_2 \rangle = t_{\lambda_1 a_2 \vec{a}_1}.$$

Παρατηρούμε αμέσως ότι η πράξη  $\hat{+}$  είναι αντιμεταθετική. Επίσης, επαληθεύεται εύκολα ότι η πράξη  $\hat{+}$  είναι και προσεταιριστική. Για κάθε μετατόπιση  $t_{\vec{u}}$  και κάθε ομοθεσία  $\langle a, \lambda \rangle$  έχουμε

$$t_{\vec{u}} \hat{+} t_{\vec{0}} = t_{\vec{u}} = t_{\vec{0}} \hat{+} t_{\vec{u}} \quad \text{και} \quad \langle a, \lambda \rangle \hat{+} t_{\vec{u}} = \langle a, \lambda \rangle = t_{\vec{u}} \hat{+} \langle a, \lambda \rangle.$$

Άρα, η μετατόπιση  $t_{\vec{0}} = Id_{\mathcal{E}}$  είναι το ουδέτερο στοιχείο για την πράξη  $\hat{+}$ . Επιπλέον, ισχύουν τα εξής:

$$t_{\vec{u}} \hat{+} t_{-\vec{u}} = t_{\vec{0}} = t_{-\vec{u}} \hat{+} t_{\vec{u}} \quad \text{και} \quad \langle a, \lambda \rangle \hat{+} \langle a, -\lambda \rangle = t_{\vec{0}} = \langle a, -\lambda \rangle \hat{+} \langle a, \lambda \rangle.$$

Συνεπώς, τα αντίθετα των  $t_{\vec{u}}$  και  $\langle a, \lambda \rangle$  είναι τα  $t_{-\vec{u}}$  και  $\langle a, -\lambda \rangle$ , αντίστοιχα, δηλαδή έχουμε:

$$-t_{\vec{u}} = t_{-\vec{u}} \quad \text{και} \quad -\langle a, \lambda \rangle = \langle a, -\lambda \rangle.$$

Επομένως, το ζεύγος  $(\mathcal{E}, \hat{+})$  είναι αντιμεταθετική ομάδα.

Στη συνέχεια ορίζουμε τον πολλαπλασιασμό  $\hat{\cdot}$  ενός πραγματικού αριθμού  $\kappa$  με ένα στοιχείο του  $\mathcal{E}$ . Αν  $\kappa \neq 0$ , τότε θέτουμε

$$\kappa \hat{\cdot} \langle a, \lambda \rangle = \langle a, \kappa \lambda \rangle$$

και

$$0 \hat{\cdot} \langle a, \lambda \rangle = t_{\vec{0}} = Id_{\mathcal{E}}.$$

Επίσης, θέτουμε

$$\kappa \hat{\cdot} t_{\vec{u}} = t_{\kappa \vec{u}}.$$

Εύκολα επαληθεύουμε ότι για κάθε  $x, y \in \mathcal{E}$  και  $\kappa, \mu \in \mathbb{R}$  ισχύουν τα παρακάτω:

1.  $\kappa \hat{\cdot} (x + y) = \kappa \hat{\cdot} x + \kappa \hat{\cdot} y,$
2.  $(\kappa + \mu) \hat{\cdot} x = \kappa \hat{\cdot} x + \mu \hat{\cdot} y,$
3.  $\kappa \hat{\cdot} (\mu \hat{\cdot} x) = (\kappa \mu) \hat{\cdot} x,$

$$4. 1 \hat{\cdot} x = x.$$

Συνεπώς, το σύνολο  $\mathcal{E}$  με τις πράξεις της πρόσθεσης  $\hat{+}$  και του πολλαπλασιασμού  $\hat{\cdot}$  που ορίσαμε αποτελεί πραγματικό διανυσματικό χώρο.

Επίσης, αν  $x, y \in \mathcal{E}$  και  $\kappa, \mu \in \mathbb{R}$ , τότε θα συμβολίζουμε το στοιχείο  $\kappa x \hat{+} (-\mu)y$  με  $\kappa x \hat{-} \mu y$ .

Ας θεωρήσουμε τώρα την απεικόνιση

$$i_{\mathcal{E}} : \vec{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}, \vec{u} \longmapsto t_{\vec{u}}.$$

Αν  $i_{\mathcal{E}}(\vec{u}) = i_{\mathcal{E}}(\vec{v})$ , τότε  $t_{\vec{u}} = t_{\vec{v}}$  και επομένως για κάθε  $a \in \mathcal{E}$  ισχύει  $a + \vec{u} = a + \vec{v}$ , απ' όπου έχουμε  $\vec{u} = \vec{v}$ . Άρα, η απεικόνιση  $i_{\mathcal{E}}$  είναι ένεση. Για κάθε  $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}$  και  $\kappa \in \mathbb{R}$  έχουμε:

$$i_{\mathcal{E}}(\vec{u} + \vec{v}) = t_{\vec{u} + \vec{v}} = t_{\vec{u}} \hat{+} t_{\vec{v}} = i_{\mathcal{E}}(\vec{u}) + i_{\mathcal{E}}(\vec{v})$$

και

$$i_{\mathcal{E}}(\kappa \vec{u}) = t_{\kappa \vec{u}} = \kappa t_{\vec{u}} = \kappa i_{\mathcal{E}}(\vec{u}).$$

Επομένως, η απεικόνιση  $i_{\mathcal{E}}$  είναι γραμμική και, καθώς είναι ένεση, είναι μονομορφισμός διανυσματικών χώρων. Έτσι, ο διανυσματικός χώρος  $\mathcal{E}$  περιέχει ως υποχώρο του μία ισόμορφη εικόνα του  $\vec{\mathcal{E}}$ .

Στη συνέχεια θεωρούμε την απεικόνιση

$$j_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \longrightarrow \vec{\mathcal{E}}, a \longmapsto \langle a, 1 \rangle.$$

Η ομοθεσία  $\langle a, 1 \rangle$  είναι η σταθερή απεικόνιση που σε κάθε στοιχείο  $x \in \mathcal{E}$  απεικονίζει το  $a$ . Έτσι, αν  $j_{\mathcal{E}}(a) = j_{\mathcal{E}}(b)$ , τότε  $a = b$ . Επομένως, η απεικόνιση  $j_{\mathcal{E}}$  είναι ένεση. Επίσης, για κάθε  $a \in \mathcal{E}$  και  $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}$ , έχουμε:

$$j_{\mathcal{E}}(a + \vec{u}) = \langle a + \vec{u}, 1 \rangle = \langle a, 1 \rangle \hat{+} t_{\vec{u}} = j_{\mathcal{E}}(a) \hat{+} i_{\mathcal{E}}(\vec{u}).$$

Συνεπώς, η απεικόνιση  $j_{\mathcal{E}}$  είναι ομοπαράλληλική με προσαρτημένη γραμμική απεικόνιση την  $i_{\mathcal{E}}$ . Έτσι, από την Πρόταση 3.4 έπεται ότι η κατεύθυνση του ομοπαράλληλικού χώρου  $j(\mathcal{E})$  είναι ο χώρος  $i(\mathcal{E})$ . Όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, θα σημειώνουμε πιο απλά με  $i$  και  $j$  τις απεικονίσεις  $i_{\mathcal{E}}$  και  $j_{\mathcal{E}}$ .

**Ορισμός 4.1.** Ο διανυσματικός χώρος  $(\mathcal{E}, \hat{+}, \hat{\cdot})$  καλείται *γραμμικοποίηση ή ομογενοποίηση* του ομοπαράλληλικού χώρου  $(\vec{\mathcal{E}}, \vec{+}, \vec{\cdot})$ .

Η παρακάτω πρόταση δίνει τον τύπο του αθροίσματος περισσότερο των δύο στοιχείων της μορφής  $\langle a, \lambda \rangle$ .

**Πρόταση 4.1.** Ας είναι  $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{E}$ . Ας υποθέσουμε ότι  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  έτσι, ώστε για κάθε  $k$  διακεκριμένους δείκτες  $\tau(1), \dots, \tau(k) \in \{1, \dots, n\}$ , με  $k < n$ , έχουμε  $\lambda_{\tau(1)} + \dots + \lambda_{\tau(k)} \neq 0$ . Ισχύουν τα εξής:

(α) Αν  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n \neq 0$ , τότε έχουμε:

$$\sum_{i=1}^n \langle a_i, \lambda_i \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} a_i, \sum_{i=1}^n \lambda_i \right\rangle.$$

(β) Αν  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$ , τότε, για κάθε  $b \in \mathcal{E}$ , έχουμε:

$$\sum_{i=1}^n \langle a_i, \lambda_i \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i i(\overrightarrow{ba_i}).$$

*Απόδειξη.* (α) Πρώτα θα δείξουμε χρησιμοποιώντας επαγωγή ότι ισχύει:

$$\sum_{i=1}^n \langle a_i, \lambda_i \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} a_i, \sum_{i=1}^n \lambda_i \right\rangle.$$

Για  $n = 2$  είναι ο ορισμός του αθροίσματος των στοιχείων  $\langle a_1, \lambda_1 \rangle$  και  $\langle a_2, \lambda_2 \rangle$ . Υποθέτουμε ότι η παραπάνω ισότητα ισχύει για  $n = k$ . Ας είναι  $n = k + 1$ . Τότε, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.5, έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} \langle a_i, \lambda_i \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^k \lambda_i} a_i, \sum_{i=1}^k \lambda_i \right\rangle \hat{+} \langle a_{k+1}, \lambda_{k+1} \rangle \\ &= \left\langle \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i} \left( \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^k \lambda_i} a_i \right) + \frac{\lambda_{k+1}}{\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i} a_{k+1}, \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i} a_i, \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i \right\rangle. \end{aligned}$$

Άρα, η προς απόδειξη ισότητα ισχύει.

(β) Από την ιδιότητα (α) προκύπτει:

$$\sum_{i=1}^n \langle a_i, \lambda_i \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i} a_i, \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \right\rangle \hat{+} \langle a_n, \lambda_n \rangle = \iota(\lambda_n \overline{c a_n}),$$

όπου

$$c = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i} a_i.$$

Για κάθε  $b \in \mathcal{E}$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \overline{a_n c} &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i} \overline{a_n a_i} \\ &= -\frac{1}{\lambda_n} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (\overline{a_n b} + \overline{b a_i}) \\ &= -\frac{1}{\lambda_n} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \overline{b a_i} \right) - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i}{\lambda_n} \overline{a_n b} \\ &= -\frac{1}{\lambda_n} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \overline{b a_i} \right) + \overline{a_n b}. \end{aligned}$$

Έτσι, παίρνουμε:

$$\lambda_n \overline{c a_n} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overline{b a_i}.$$

Επομένως, έχουμε:

$$\sum_{i=1}^n \langle a_i, \lambda_i \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \iota(\overline{b a_i}),$$

απ' όπου το αποτέλεσμα. □

**Πόρισμα 4.1.** Ας είναι  $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{E}$  και  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ . Θέτουμε  $E_n = \{1, \dots, n\}$ . Αν  $D$  είναι το μεγαλύτερο υποσύνολο του  $E_n$  τέτοιο, ώστε  $\sum_{i \in D} \lambda_i = 0$ , τότε ισχύει:

$$\sum_{i=1}^n \langle a_i, \lambda_i \rangle = \sum_{i \in D} \lambda_i \iota(\overline{b a_i}) \hat{+} \left\langle \sum_{i \in E_n \setminus D} \frac{\lambda_i}{\sum_{i \in E_n \setminus D} \lambda_i} a_i, \sum_{i \in E_n \setminus D} \lambda_i \right\rangle.$$

Απόδειξη. Υπάρχουν μη κενά, ξένα μεταξύ τους ανά δύο υποσύνολα  $D_1, \dots, D_s$  του  $D$ , των οποίων η ένωση δίνει το  $D$ , ώστε για κάθε  $i = 1, \dots, s$  να έχουμε:

$$\sum_{k \in D_i} \lambda_k = 0$$

και

$$\sum_{k \in C} \lambda_k \neq 0$$

για κάθε μη κενό σύνολο  $C \subset D_i$ . Έτσι, για κάθε  $b \in \mathcal{E}$  και  $i = 1, \dots, s$ , η Πρόταση 4.1(β) δίνει:

$$\sum_{j \in D_i} \langle a_j, \lambda_j \rangle = \sum_{j \in D_i} \lambda_j i(\overrightarrow{ba_j}).$$

Επομένως, έχουμε:

$$\sum_{i \in D} \langle a_i, \lambda_i \rangle = \sum_{i \in D} \lambda_i i(\overrightarrow{ba_i}).$$

Επίσης, από την Πρόταση 4.1(α) προκύπτει:

$$\sum_{i \in E_n \setminus D} \langle a_i, \lambda_i \rangle = \left\langle \sum_{i \in E_n \setminus D} \frac{\lambda_i}{\sum_{i \in E_n \setminus D} \lambda_i} a_i, \sum_{i \in E_n \setminus D} \lambda_i \right\rangle.$$

Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει το αποτέλεσμα.  $\square$

**Πρόταση 4.2.** Για κάθε  $a \in \mathcal{E}$  έχουμε:

$$\hat{\mathcal{E}} = i(\vec{\mathcal{E}}) \oplus \mathbb{R}j(a).$$

Επίσης, υπάρχει μοναδική γραμμική μορφή  $\omega : \hat{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $\omega(\langle b, \mu \rangle) = \mu$ , για κάθε ομοθεσία  $\langle b, \mu \rangle$ , και  $\omega(t_{\vec{a}}) = 0$ , για κάθε μετατόπιση  $t_{\vec{a}}$ . Επιπλέον, ισχύει  $\omega^{-1}(0) = i(\vec{\mathcal{E}})$  και  $\omega^{-1}(1) = j(\mathcal{E})$ .

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι ισχύει  $i(\vec{\mathcal{E}}) + \mathbb{R}j(a) \subseteq \hat{\mathcal{E}}$ . Ας είναι  $\langle b, \mu \rangle$  μία ομοθεσία. Θέτουμε  $\vec{u} = \mu \overrightarrow{ab}$  και έχουμε:

$$i(\vec{u}) \hat{+} \mu j(a) = t_{\vec{u}} \hat{+} \mu \langle a, 1 \rangle = t_{\vec{u}} \hat{+} \langle a, \mu \rangle = \langle a + \mu^{-1} \vec{u}, \mu \rangle = \langle b, \mu \rangle.$$

Έτσι, παίρνουμε  $\hat{\mathcal{E}} = i(\vec{\mathcal{E}}) + \mathbb{R}j(a)$ . Καθώς ισχύει  $i(\vec{\mathcal{E}}) \cap \mathbb{R}j(a) = \{Id_{\mathcal{E}}\}$ , έπεται ότι  $\hat{\mathcal{E}} = i(\vec{\mathcal{E}}) \oplus \mathbb{R}j(a)$ .

Ας είναι  $t_{\vec{a}_1}, \dots, t_{\vec{a}_n}$  μία βάση του  $i(\vec{\mathcal{E}})$ . Τότε, υπάρχει μία μοναδική γραμμική μορφή  $\omega : \hat{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $\omega(t_{\vec{a}_i}) = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) και  $\omega(j(a)) = 1$ . Επίσης, για κάθε  $\langle b, \mu \rangle$  έχουμε:

$$\langle b, \mu \rangle = \mu \langle b, 1 \rangle = \mu \langle a + \overrightarrow{ab}, 1 \rangle = \mu t_{\vec{ab}} \hat{+} \mu \langle a, 1 \rangle.$$

Έτσι, παίρνουμε:

$$\omega(\langle b, \mu \rangle) = \mu \omega(t_{\vec{ab}}) + \mu \omega(\langle a, 1 \rangle) = \mu.$$

Επομένως, έχουμε  $\omega(\langle b, \mu \rangle) = 1$  αν και μόνον αν  $\mu = 1$ , και κατά συνέπεια ισχύει  $\omega^{-1}(1) = j(\mathcal{E})$ . Τέλος, είναι προφανές ότι  $\omega^{-1}(0) = i(\vec{\mathcal{E}})$ .  $\square$

**Πόρισμα 4.2.** Ισχύει:

$$\dim \hat{\mathcal{E}} = \dim \mathcal{E} + 1.$$

**Παρατήρηση 4.1.** Ας είναι  $a, b \in \mathcal{E}$  με  $a \neq b$  και  $x \in \hat{\mathcal{E}}$ . Καθώς ισχύει

$$\hat{\mathcal{E}} = i(\vec{\mathcal{E}}) \oplus \mathbb{R}j(a) = i(\vec{\mathcal{E}}) \oplus \mathbb{R}j(b),$$

έχουμε

$$x = i(\vec{u}) \hat{+} \lambda j(a) = i(\vec{v}) \hat{+} \mu j(b),$$

όπου  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{E}$  και  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Χρησιμοποιώντας την ισότητα  $b = a + \vec{ab}$  παίρνουμε:

$$t_{\vec{u}} \hat{+} \lambda \langle a, 1 \rangle = t_{\vec{v}} \hat{+} \mu \langle a + \vec{ab}, 1 \rangle,$$

απ' όπου έχουμε

$$t_{\vec{u}} \hat{+} \lambda \langle a, 1 \rangle = (t_{\vec{v}} \hat{+} \mu t_{\vec{ab}}) \hat{+} \mu \langle a, 1 \rangle,$$

ή

$$t_{\vec{u}} \hat{+} \lambda \langle a, 1 \rangle = (t_{\vec{v} + \mu \vec{ab}}) \hat{+} \mu \langle a, 1 \rangle.$$

Έτσι, προκύπτει  $\lambda = \mu$  και  $\vec{u} = \vec{v} + \mu \vec{ab}$ .

**Παράδειγμα 4.1.** Θεωρούμε τον ομοπαράλληλο χώρο  $A$ . Ο διανυσματικός χώρος  $\hat{A}$  αποτελείται από τις μετατοπίσεις

$$t_u : A \longrightarrow A, x \longmapsto x + u$$

και τις ομοθεσίες

$$\langle a, \lambda \rangle : A \longrightarrow A, x \longmapsto x + \lambda(a - x),$$

με  $\lambda \neq 0$ . Σύμφωνα με την Πρόταση 4.2 έχουμε  $\hat{A} = i_{\mathbb{A}}(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}j(1)$  και επομένως  $\dim \hat{A} = 2$ . Συνεπώς  $\hat{A} \cong \mathbb{R}^2$ .

**Παράδειγμα 4.2.** Θεωρούμε τον ομοπαράλληλο χώρο  $A^2$ . Τα στοιχεία του διανυσματικού χώρου  $\widehat{A^2}$  είναι οι μετατοπίσεις

$$t_{(u_1, u_2)} : A^2 \longrightarrow A^2, (x_1, x_2) \longmapsto (x_1 + u_1, x_2 + u_2)$$

και οι ομοθεσίες

$$\langle (a_1, a_2), \lambda \rangle : A \longrightarrow A, x \longmapsto x + \lambda(a_1 - x_1, a_2 - x_2),$$

με  $\lambda \neq 0$ . Σύμφωνα με την Πρόταση 4.2, έχουμε  $\widehat{A^2} = i_{\mathbb{A}}(\mathbb{R}^2) \oplus \mathbb{R}j(1, 0)$  και επομένως  $\dim \hat{A} = 3$ . Συνεπώς  $\widehat{A^2} \cong \mathbb{R}^3$ .

## 4.2 Βάσεις του διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$

Σ' αυτή τη ενότητα θα δούμε τη σχέση των ομοπαράλληλων πλαισίων ενός ομοπαράλληλου χώρου  $\mathcal{E}$  με τις βάσεις της γραμμικοποίησης του  $\mathcal{E}$ . Ας είναι  $\Pi = (a_0, \dots, a_m)$  ένα ομοπαράλληλο πλαίσιο του  $\mathcal{E}$ . Θεωρούμε τις  $m + 1$ -άδες

$$\mathcal{B}_1(\Pi) = (j(a_0), \dots, j(a_m)) \quad \text{και} \quad \mathcal{B}_2(\Pi) = (i(\vec{a_0 a_1}), \dots, i(\vec{a_0 a_m}), j(a_0)).$$

**Πρόταση 4.3.** Οι  $m + 1$ -άδες  $\mathcal{B}_1(\Pi)$  και  $\mathcal{B}_2(\Pi)$  αποτελούν βάσεις του χώρου  $\hat{\mathcal{E}}$ . Αν  $x \in \mathcal{E}$  με βαρυκεντρικές συντεταγμένες  $(\lambda_0, \dots, \lambda_m)$  και με Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x_1, \dots, x_m)$  ως προς το  $\Pi$ , τότε οι συντεταγμένες του  $\langle x, \lambda \rangle$  ως προς τις βάσεις  $\mathcal{B}_1(\Pi)$  και  $\mathcal{B}_2(\Pi)$  είναι  $(\lambda \lambda_0, \dots, \lambda \lambda_m)$  και  $(\lambda x_1, \dots, \lambda x_m, \lambda)$ , αντίστοιχα. Επίσης, αν  $\vec{v} = v_1 \vec{a_0 a_1} + \dots + v_m \vec{a_0 a_m}$ , τότε οι συντεταγμένες του  $i(\vec{v})$  ως προς τις βάσεις  $\mathcal{B}_1(\Pi)$  και  $\mathcal{B}_2(\Pi)$  είναι  $(-(v_1 + \dots + v_m), v_1, \dots, v_m)$  και  $(v_1, \dots, v_m, 0)$ , αντίστοιχα.

*Απόδειξη.* Ας είναι  $\lambda_0, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  έτσι, ώστε να ισχύει:

$$\lambda_0 j(a_0) \hat{+} \dots \hat{+} \lambda_m j(a_m) = Id_{\mathcal{E}}.$$

(Υπενθυμίζουμε ότι η απεικόνιση  $Id_{\mathcal{E}}$  είναι το ουδέτερο στοιχείο για την πρόσθεση  $\hat{+}$  στο  $\hat{\mathcal{E}}$ ). Τότε, έχουμε:

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i \langle a_i, 1 \rangle = Id_{\mathcal{E}},$$

ή

$$\sum_{i=0}^m \langle a_i, \lambda_i \rangle = Id_{\mathcal{E}}.$$

Ας είναι  $S_m = \{0, \dots, m\}$  και  $D$  το μεγαλύτερο υποσύνολο του  $S_m$  τέτοιο, ώστε  $\sum_{i \in D} \lambda_i = 0$ . Σύμφωνα με το Πρόγραμμα 4.1, έχουμε:

$$\sum_{i=0}^m \langle a_i, \lambda_i \rangle = \sum_{i \in D} \lambda_i i(\overrightarrow{ba_i}) \hat{+} \left\langle \sum_{i \in S_m \setminus D} \frac{\lambda_i}{\sum_{i \in S_m \setminus D} \lambda_i} a_i, \sum_{i \in S_m \setminus D} \lambda_i \right\rangle$$

ή ισοδύναμα

$$\sum_{i \in D} \lambda_i i(\overrightarrow{ba_i}) \hat{+} \left( \sum_{i \in S_m \setminus D} \lambda_i \right) j(a) = Id_{\mathcal{E}},$$

όπου

$$a = \sum_{i \in S_m \setminus D} \frac{\lambda_i}{\sum_{i \in S_m \setminus D} \lambda_i} a_i.$$

Ας υποθέσουμε ότι  $D \neq S_m$ . Σύμφωνα με την Πρόταση 4.2 ισχύει  $\mathcal{E} = i(\vec{\mathcal{E}}) \oplus \mathbb{R}j(a)$  και επομένως έχουμε  $\sum_{i \in S_m \setminus D} \lambda_i = 0$ . Αυτό όμως είναι αδύνατο γιατί υποθέσαμε ότι  $D \neq S_m$ . Άρα, ισχύει  $D = S_m$  και επομένως έχουμε:

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i i(\overrightarrow{ba_i}) = Id_{\mathcal{E}}.$$

Θέτοντας  $b = a_0$  παίρνουμε:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i i(\overrightarrow{a_0 a_i}) = Id_{\mathcal{E}}.$$

Καθώς η απεικόνιση  $i$  είναι γραμμική, προκύπτει:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \overrightarrow{a_0 a_i} = \vec{0}.$$

Τα διανύσματα  $\overrightarrow{a_0 a_i}$  αποτελούν μία βάση του  $\mathcal{E}$  και κατά συνέπεια έπεται ότι  $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$ . Τέλος, επειδή  $D = E_m$ , έχουμε και  $\lambda_0 = 0$ . Συνεπώς, το σύνολο  $\mathcal{B}_1(\Pi)$  είναι γραμμικά ανεξάρτητο και καθώς έχει  $m + 1$  στοιχεία αποτελεί μία βάση του  $\mathcal{E}$ .

Ας είναι  $\lambda_0, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  έτσι, ώστε να ισχύει:

$$\lambda_0 j(a_0) \hat{+} \lambda_1 i(\overrightarrow{a_0 a_1}) \hat{+} \dots \hat{+} \lambda_m i(\overrightarrow{a_0 a_m}) = Id_{\mathcal{E}}$$

ή ισοδύναμα

$$\lambda_0 j(a_0) \hat{+} i(\lambda_1 \overrightarrow{a_0 a_1} + \dots + \lambda_m \overrightarrow{a_0 a_m}) = Id_{\mathcal{E}}.$$

Καθώς ισχύει  $\mathcal{E} = i(\vec{\mathcal{E}}) \oplus \mathbb{R}j(a_0)$ , παίρνουμε:

$$\lambda_0 = 0 \quad \text{και} \quad \lambda_1 \overrightarrow{a_0 a_1} + \dots + \lambda_m \overrightarrow{a_0 a_m} = \vec{0}.$$

Τα διανύσματα  $\overrightarrow{a_0 a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0 a_m}$  αποτελούν μία βάση του  $\mathcal{E}$  και επομένως έχουμε  $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$ . Άρα, το σύνολο  $\mathcal{B}_2(\Pi)$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και, καθώς έχει  $m + 1$  στοιχεία, είναι μία βάση του  $\mathcal{E}$ .

Ας είναι  $\langle x, \lambda \rangle \in \mathcal{E}$  με

$$x = \lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_m a_m = a_0 + x_1 \overrightarrow{a_0 a_1} + \dots + x_m \overrightarrow{a_0 a_m}.$$

Τότε, έχουμε:

$$\langle x, \lambda \rangle = \lambda j(x) = \lambda(\lambda_{0j}(a_0) \hat{+} \cdots \hat{+} \lambda_{mj}(a_m)) = (\lambda \lambda_0)j(a_0) \hat{+} \cdots \hat{+} (\lambda \lambda_m)j(a_m)$$

και

$$\begin{aligned} \langle x, \lambda \rangle &= \langle a_0 + x_1 \overrightarrow{a_0 a_1} + \cdots + x_m \overrightarrow{a_0 a_m}, \lambda \rangle \\ &= \langle a_0, \lambda \rangle \hat{+} i(\lambda(x_1 \overrightarrow{a_0 a_1} \hat{+} \cdots \hat{+} x_m \overrightarrow{a_0 a_m})) \\ &= \lambda x_1 i(\overrightarrow{a_0 a_1}) \hat{+} \cdots \hat{+} \lambda x_m i(\overrightarrow{a_0 a_m}) \hat{+} \lambda j(a_0). \end{aligned}$$

Επομένως, οι συντεταγμένες του  $\langle x, \lambda \rangle$  ως προς τις βάσεις  $\mathcal{B}_1(\Pi)$  και  $\mathcal{B}_2(\Pi)$  είναι  $(\lambda \lambda_0, \dots, \lambda \lambda_m)$  και  $(\lambda x_1, \dots, \lambda x_m, \lambda)$ , αντίστοιχα.

Τέλος, ας είναι  $\vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}$ , με  $\vec{v} = v_1 \overrightarrow{a_0 a_1} + \cdots + v_m \overrightarrow{a_0 a_m}$ . Τότε, έχουμε:

$$i(\vec{v}) = v_1 i(\overrightarrow{a_0 a_1}) + \cdots + v_m i(\overrightarrow{a_0 a_m}).$$

Επομένως, οι συντεταγμένες του στοιχείου  $i(\vec{v})$  ως προς τη βάση  $\mathcal{B}_2(\Pi)$  είναι  $(v_1, \dots, v_m, 0)$ . Επίσης, για κάθε  $i = 1, \dots, m$  έχουμε  $a_i = a_0 + a_0 \vec{a}_i$  και επομένως ισχύει  $j(a_i) = j(a_0) + i(a_0 \vec{a}_i)$ . Έτσι, παίρνουμε  $i(a_0 \vec{a}_i) = j(a_i) \hat{-} j(a_0)$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Οπότε, έχουμε:

$$i(\vec{v}) = -(v_1 + \cdots + v_m)j(a_0) \hat{-} v_1 j(a_1) \hat{-} \cdots \hat{-} v_m j(a_m).$$

Συνεπώς, οι συντεταγμένες του στοιχείου  $i(\vec{v})$  ως προς τη βάση  $\mathcal{B}_1(\Pi)$  είναι  $(-(v_1 + \cdots + v_m), v_1, \dots, v_m)$ .  $\square$

**Παράδειγμα 4.3.** Θεωρούμε τον ομοπαράλληλικό χώρο  $A^n$  και το ομοπαράλληλικό πλαίσιο  $\Pi$  που αποτελείται από τα σημεία  $E_0 = (0, \dots, 0)$ ,  $E_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $E_n = (0, \dots, 0, 1)$ . Τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 4.3, τα σύνολα

$$\mathcal{B}_1(\Pi) = (j(E_0), j(E_1), \dots, j(E_n))$$

και

$$\mathcal{B}_2(\Pi) = (i(\overrightarrow{E_0 E_1}), \dots, i(\overrightarrow{E_0 E_n}), j(E_0))$$

αποτελούν βάσεις του  $\widehat{A^n}$ . Ας σημειωθεί ότι το στοιχείο  $j(E_k)$  είναι η απεικόνιση

$$\langle E_k, 1 \rangle : A^n \longrightarrow A^n, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto E_k$$

και το στοιχείο  $i(\overrightarrow{E_0 E_k})$  η απεικόνιση

$$t_{\overrightarrow{E_0 E_k}} : A^n \longrightarrow A^n, x \longmapsto x + E_k,$$

**Παράδειγμα 4.4.** Θεωρούμε τον ομοπαράλληλικό χώρο  $(\mathcal{P}_{n,1}, \mathcal{P}_{n,0}, +)$  του Παραδείγματος 1.6. Από το Παράδειγμα 1.22 έχουμε ότι η  $n+1$ -άδα  $F = (f_0, \dots, f_n)$ , όπου  $f_i = (i+1)x^i$  ( $i = 0, \dots, n$ ), είναι ένα ομοπαράλληλικό πλαίσιο του χώρου  $\mathcal{P}_{n,1}$ . Έτσι, η Πρόταση 4.3 συνεπάγεται ότι τα σύνολα

$$\mathcal{B}_1(F) = (j(f_0), j(f_1), \dots, j(f_n))$$

και

$$\mathcal{B}_2(F) = (i(\overrightarrow{f_0 f_1}), \dots, i(\overrightarrow{f_0 f_n}), j(f_0))$$

αποτελούν βάσεις του  $\widehat{\mathcal{P}_{n,1}}$ . Παρατηρούμε ότι το στοιχείο  $j(f_k)$  είναι η απεικόνιση

$$\langle f_k, 1 \rangle : \mathcal{P}_{n,1} \longrightarrow \mathcal{P}_{n,1}, f \longmapsto f_k$$

και το στοιχείο  $i(\overrightarrow{f_0 f_k})$  η απεικόνιση

$$t_{\overrightarrow{f_0 f_k}} : \mathcal{P}_{n,1} \longrightarrow \mathcal{P}_{n,1}, f \longmapsto f + (k+1)x^k - 1.$$

### 4.3 Γραμμικοποίηση Ομοπαράλληλικών Απεικονίσεων

Στη συνέχεια δίνουμε μία σημαντική ιδιότητα του γραμμικού χώρου  $\mathcal{E}$ , σύμφωνα με την οποία ομοπαράλληλικές απεικονίσεις από τον  $\mathcal{E}$  σε έναν γραμμικό χώρο  $\vec{F}$  μπορούν να επεκταθούν με μοναδικό τρόπο σε γραμμικές απεικονίσεις από τον  $\mathcal{E}$  στον  $\vec{F}$ .

**Πρόταση 4.4.** Για κάθε πραγματικό διανυσματικό χώρο  $\vec{F}$  και ομοπαράλληλική απεικόνιση  $f : \mathcal{E} \rightarrow F$ , υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση  $\hat{f} : \mathcal{E} \rightarrow \vec{F}$  τέτοια, ώστε να ισχύει  $f = \hat{f} \circ j$ , και

$$\hat{f}(i(\vec{u}) \hat{+} \lambda j(a)) = \lambda f(a) + \vec{f}(\vec{u}),$$

για κάθε  $\vec{u} \in \mathcal{E}$ ,  $a \in \mathcal{E}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Επιπλέον, αν  $\lambda \neq 0$ , τότε έχουμε:

$$\hat{f}(i(\vec{u}) \hat{+} \lambda j(a)) = \lambda f(a + \lambda^{-1} \vec{u}).$$

*Απόδειξη.* Ας είναι  $a \in \mathcal{E}$ . Σύμφωνα με την Πρόταση 4.2 έχουμε  $\mathcal{E} = i(\mathcal{E}) \oplus \mathbb{R}j(a)$ . Έτσι, τα αθροίσματα  $i(\vec{u}) \hat{+} \lambda j(a)$ , όπου  $\vec{u} \in \mathcal{E}$  και  $\lambda \in \mathbb{R}$ , είναι διαφορετικά ανά δύο και είναι όλα τα στοιχεία του  $\mathcal{E}$ . Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\hat{f}_a : \mathcal{E} \longrightarrow \vec{F}, \quad i(\vec{u}) \hat{+} \lambda j(a) \longmapsto \lambda f(a) + \vec{f}(\vec{u}).$$

Ας είναι  $x, y \in \mathcal{E}$  και  $\kappa \in \mathbb{R}$ . Τότε  $x = i(\vec{u}) \hat{+} \lambda j(a)$  και  $y = i(\vec{v}) \hat{+} \mu j(a)$ . Οπότε, έχουμε:

$$\begin{aligned} \hat{f}_a(x \hat{+} y) &= \hat{f}_a(i(\vec{u} + \vec{v}) \hat{+} (\lambda + \mu)j(a)) = (\lambda + \mu)f(a) + \vec{f}(\vec{u} + \vec{v}) = \\ &= (\lambda f(a) + \vec{f}(\vec{u})) + (\mu f(a) + \vec{f}(\vec{v})) = \hat{f}_a(x) + \hat{f}_a(y) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \hat{f}_a(\kappa x) &= \hat{f}_a(\kappa(i(\vec{u}) \hat{+} \lambda j(a))) = \hat{f}_a(i(\kappa \vec{u}) \hat{+} \kappa \lambda j(a)) = \\ &= \kappa \lambda f(a) + \vec{f}(\kappa \vec{u}) = \kappa(\lambda f(a) + \vec{f}(\vec{u})) = \kappa \hat{f}_a(x). \end{aligned}$$

Συνεπώς, η απεικόνιση  $\hat{f}_a$  είναι γραμμική.

Ας είναι  $x \in \mathcal{E}$ . Αν  $a, b \in \mathcal{E}$  με  $a \neq b$ , τότε  $x = i(\vec{u}) \hat{+} \lambda j(a) = i(\vec{v}) \hat{+} \mu j(b)$ , όπου  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{E}$  και  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Από την Παρατήρηση 4.1 έχουμε  $\lambda = \mu$  και  $\vec{u} = \vec{v} + \mu \vec{a}\vec{b}$ . Επομένως

$$\begin{aligned} \hat{f}_a(x) &= \lambda f(a) + \vec{f}(\vec{u}) = \mu f(a) + \vec{f}(\vec{v} + \mu \vec{a}\vec{b}) = \\ &= \mu f(a) + \vec{f}(\vec{v}) + \mu \vec{f}(\vec{a}\vec{b}) = \mu f(b) + \vec{f}(\vec{v}) = \hat{f}_b(x). \end{aligned}$$

Δηλαδή, οι απεικονίσεις της μορφής  $\hat{f}_a$ , όπου  $a \in \mathcal{E}$ , είναι όλες ίσες. Θα συμβολίζουμε με  $\hat{f}_a$  αυτή την απεικόνιση. Έτσι, για κάθε  $\vec{u} \in \mathcal{E}$ ,  $a \in \mathcal{E}$  και  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ισχύει:

$$\hat{f}_a(i(\vec{u}) \hat{+} \lambda j(a)) = \lambda f(a) + \vec{f}(\vec{u}).$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι παίρνοντας  $\lambda = 1$  και  $\vec{u} = \vec{0}$  έχουμε  $\hat{f}_a(j(a)) = \lambda f(a)$ , για κάθε  $a \in \mathcal{E}$ , και επομένως έχουμε  $f = \hat{f}_a \circ j$ .

Ας είναι  $g : \mathcal{E} \rightarrow \vec{F}$  μία γραμμική απεικόνιση η οποία έχει τις παραπάνω ιδιότητες. Θα δείξουμε ότι  $g = \hat{f}_a$ . Καθώς έχουμε  $f = g \circ j$  και  $g(i(\vec{u})) = \vec{f}(\vec{u})$ , προκύπτει:

$$g(i(\vec{u}) \hat{+} \lambda j(a)) = g(i(\vec{u})) + \lambda g(j(a)) = \vec{f}(\vec{u}) + \lambda f(a) = \hat{f}_a(i(\vec{u}) \hat{+} \lambda j(a)).$$

Άρα, έχουμε  $\hat{f}_a(x) = g(x)$ , για κάθε  $x \in \mathcal{E}$ , και κατά συνέπεια  $\hat{f}_a = g$ .

Τέλος, αν  $\lambda \neq 0$ , τότε έχουμε:

$$\hat{f}_a(i(\vec{u}) \hat{+} \lambda j(a)) = \lambda f(a) + \vec{f}(\vec{u}) = \lambda(f(a) + \lambda^{-1} \vec{f}(\vec{u})) = \lambda f(a + \lambda^{-1} \vec{u}).$$

□



**Πόρισμα 4.3.** Ας είναι  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$  ομοπαράλληλοι χώροι και  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  μία ομοπαράλληλη απεικόνιση. Τότε, υπάρχει μία μοναδική γραμμική απεικόνιση  $\hat{f} : \hat{E} \rightarrow \hat{F}$  τέτοια, ώστε να ισχύει  $\hat{f} \circ J_{\mathcal{E}} = J_{\mathcal{F}} \circ f$  και

$$\hat{f}(i_{\mathcal{E}}(\vec{u}) \hat{+} \lambda J_{\mathcal{E}}(a)) = \lambda J_{\mathcal{F}}(f(a)) \hat{+} i_{\mathcal{F}}(\vec{f}(\vec{u})),$$

για κάθε  $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}, a \in \mathcal{E}$  και  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Αν  $\lambda \neq 0$ , τότε

$$\hat{f}(i(\vec{u}) \hat{+} \lambda J(a)) = \lambda J_{\mathcal{F}}(f(a) + \lambda^{-1} \vec{u}).$$

Ειδικότερα, ισχύει  $\hat{f}(i_{\mathcal{E}}(\vec{\mathcal{E}})) \subseteq i_{\mathcal{F}}(\vec{\mathcal{F}})$ .

*Απόδειξη.* Θεωρούμε την ομοπαράλληλη απεικόνιση  $J_{\mathcal{F}} \circ f : \mathcal{E} \rightarrow \vec{\mathcal{F}}$ . Από την Πρόταση 4.4 έπεται ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση  $\hat{f} : \hat{\mathcal{E}} \rightarrow \hat{\mathcal{F}}$  έτσι, ώστε να ισχύει  $\hat{f} \circ J_{\mathcal{E}} = J_{\mathcal{F}} \circ f$ . Επιπλέον, για κάθε  $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}, a \in \mathcal{E}$  και  $\lambda \in \mathbb{R}$ , έχουμε:

$$\hat{f}(i_{\mathcal{E}}(\vec{u}) \hat{+} \lambda J_{\mathcal{E}}(a)) = \lambda (J_{\mathcal{F}} \circ f)(a) + \overrightarrow{J_{\mathcal{F}} \circ f}(\vec{u}).$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 3.5 ισχύει  $\overrightarrow{J_{\mathcal{F}} \circ f} = i_{\mathcal{F}} \circ \vec{f}$ . Έτσι, για κάθε  $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}, a \in \mathcal{E}$  και  $\lambda \in \mathbb{R}$ , έχουμε:

$$\hat{f}(i(\vec{u}) \hat{+} \lambda J(a)) = \lambda J_{\mathcal{F}}(f(a)) \hat{+} i_{\mathcal{F}}(\vec{f}(\vec{u})).$$

□

**Πόρισμα 4.4.** Ας είναι  $\mathcal{E}$  και  $\mathcal{F}$  δύο ομοπαράλληλοι χώροι με ομοπαράλληλα πλαίσια  $\Pi_{\mathcal{E}} = (a_0, \dots, a_m)$  και  $\Pi_{\mathcal{F}} = (b_0, \dots, b_n)$ , αντίστοιχα. Επιπλέον, ας είναι  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  μία ομοπαράλληλη απεικόνιση και  $A = (\alpha_{i,j})$  ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης  $\vec{f} : \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \vec{\mathcal{F}}$  ως προς τις βάσεις  $(\overrightarrow{a_0 a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0 a_m})$  και  $(\overrightarrow{b_0 b_1}, \dots, \overrightarrow{b_0 b_n})$ . Τότε, ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης  $\hat{f} : \hat{E} \rightarrow \hat{F}$  ως προς τις βάσεις  $\mathcal{B}_2(\Pi_{\mathcal{E}})$  και  $\mathcal{B}_2(\Pi_{\mathcal{F}})$  είναι ο πίνακας

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,m} & \beta_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \dots & \alpha_{n,m} & \beta_n \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

όπου  $(\beta_1, \dots, \beta_n)$  είναι οι Καρτεσιανές συντεταγμένες του  $f(a_0)$  ως προς το  $\Pi_{\mathcal{F}}$ .

*Απόδειξη.* Έχουμε:

$$\vec{f}(\overrightarrow{a_0 a_k}) = \sum_{j=1}^n \alpha_{jk} \overrightarrow{b_0 b_j} \quad (k = 1, \dots, m).$$

Χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 4.3, παίρνουμε:

$$\hat{f}(i_{\mathcal{E}}(\overrightarrow{a_0 a_k})) = (i_{\mathcal{F}} \circ \vec{f})(\overrightarrow{a_0 a_k}) = \sum_{j=1}^n \alpha_{jk} i_{\mathcal{F}}(\overrightarrow{b_0 b_j}) \quad (k = 1, \dots, m).$$

Επίσης, έχουμε  $\hat{f}(J_{\mathcal{E}}(a_0)) = J_{\mathcal{F}}(f(a_0))$ . Σύμφωνα με την Πρόταση 4.3, οι συντεταγμένες του  $J_{\mathcal{F}}(f(a_0))$  ως προς τη βάση  $\mathcal{B}_2(\Pi_{\mathcal{F}})$  είναι μία  $n + 1$ -άδα της μορφής  $(\beta_1, \dots, \beta_n, 1)$ , όπου  $(\beta_1, \dots, \beta_n)$  είναι οι Καρτεσιανές συντεταγμένες του  $f(a_0)$  ως προς το  $\Pi_{\mathcal{F}}$ . Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης  $\hat{f} : \hat{E} \rightarrow \hat{F}$  ως προς τις βάσεις  $\mathcal{B}_2(\Pi_{\mathcal{E}})$  και  $\mathcal{B}_2(\Pi_{\mathcal{F}})$  είναι της ζητούμενης μορφής. □

**Ορισμός 4.2.** Ας είναι  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$  ομοπαράλληλοι χώροι και  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  μία ομοπαράλληλη απεικόνιση. Η γραμμική απεικόνιση  $\hat{f} : \hat{E} \rightarrow \hat{F}$  καλείται *γραμμικοποίηση ή ομογενοποίηση της  $f$* .

**Παράδειγμα 4.5.** Ας είναι  $f : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$  μία ομοπαράλληλική απεικόνιση. Τότε, σύμφωνα με το Παράδειγμα 3.4, υπάρχουν  $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  και  $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{A}^m$  έτσι, ώστε να ισχύει  $f(x) = Ax + b$ , για κάθε  $x \in \mathbb{A}^n$ . Η προσαρτημένη γραμμική απεικόνιση στη  $f$  είναι η γραμμική απεικόνιση  $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  με  $\vec{f}(x) = Ax$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}^n$ . Ας είναι  $\Pi_n$  το ομοπαράλληλικό πλαίσιο του  $\mathbb{A}^n$  που αποτελείται από τα σημεία  $O^n = (0, \dots, 0)$ ,  $E_1^n = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $E_n^n = (0, \dots, 0, 1)$  και  $\Pi_m$  το ομοπαράλληλικό πλαίσιο του  $\mathbb{A}^m$  που αποτελείται από τα σημεία  $O^m = (0, \dots, 0)$ ,  $E_1^m = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $E_m^m = (0, \dots, 0, 1)$ . Ο πίνακας  $A$  είναι ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης  $\vec{f}$  ως προς τις βάσεις  $(\overrightarrow{O^n E_1^n}, \dots, \overrightarrow{O^n E_n^n})$  του  $\mathbb{R}^n$  και  $(\overrightarrow{O^m E_1^m}, \dots, \overrightarrow{O^m E_m^m})$  του  $\mathbb{R}^m$ . Επίσης, έχουμε  $f(O^n) = b$ . Επομένως, από το Πρόσχημα 4.4, έπεται ότι ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης  $\hat{f} : \widehat{\mathbb{A}^n} \rightarrow \widehat{\mathbb{A}^m}$  ως προς τις βάσεις  $\mathcal{B}_2(\Pi_n)$  και  $\mathcal{B}_2(\Pi_m)$  είναι ο πίνακας

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,m} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \dots & \alpha_{n,m} & b_m \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

#### 4.4 Ασκήσεις-Εργασίες

##### Ασκήσεις

**4.4.1** Θεωρούμε τον ομοπαράλληλικό χώρο  $(\mathcal{P}, \mathbb{R}^2, +)$  του Παραδείγματος 1.5. Να περιγραφούν τα στοιχεία του διανυσματικού χώρου  $\hat{\mathcal{P}}$  και να δοθεί μία βάση του.

**4.4.2** Θεωρούμε τον ομοπαράλληλικό χώρο  $(\mathcal{P}_{n,1}, \mathcal{P}_{n,0}, +)$  του Παραδείγματος 1.6. Να περιγραφούν τα στοιχεία του διανυσματικού χώρου  $\widehat{\mathcal{P}_{n,1}}$  και να βρεθεί μία βάση του.

**4.4.3** Θεωρούμε τον ομοπαράλληλικό χώρο  $(\mathcal{P}, \mathbb{R}^2, +)$  του Παραδείγματος 1.5 και την απεικόνιση  $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{A}^2$  η οποία ορίζεται από τη σχέση

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 2x_2 + 1, x_1 - 3x_2 + 1), \text{ για κάθε } (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{P}.$$

Να κατασκευαστεί η γραμμική απεικόνιση  $\hat{f} : \hat{\mathcal{P}} \rightarrow \widehat{\mathbb{A}^2}$ .

**4.4.4** Ας είναι  $(\mathcal{E}_i, \vec{\mathcal{E}}_i, +_i)$  ( $i = 1, 2$ ) δύο ομοπαράλληλικοί χώροι και  $(\mathcal{E}, V, +)$  ο ομοπαράλληλικός χώρος της Άσκησης 4 του Κεφαλαίου 1. Να περιγραφούν τα στοιχεία του διανυσματικού χώρου  $\hat{\mathcal{E}}$  και ναδειχθεί ότι  $\hat{\mathcal{E}} \neq \hat{\mathcal{E}}_1 \times \hat{\mathcal{E}}_2$ .

**4.4.5** Θεωρούμε την ομοπαράλληλική απεικόνιση

$$f : \mathbb{A}^3 \rightarrow \mathbb{A}^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 2x_2 + x_3 + 1, 2x_1 + x_3 + 2, x_2 - x_3 + 3)$$

και τα ομοπαράλληλικά πλαίσια του  $\mathbb{A}^3$ ,

$$\Pi_1 = (B_0, B_1, B_2, B_3) \text{ και } \Pi_2 = (C_0, C_1, C_2, C_3),$$

όπου

$$B_0 = (0, 0, 0), B_1 = (1, 1, 0), B_2 = (1, 0, 1), B_3 = (0, 1, 1)$$

και

$$C_0 = (1, 1, 1), C_1 = (2, 1, 1), C_2 = (1, 2, 1), C_3 = (1, 1, 2).$$

Να βρεθεί ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης  $\hat{f} : \widehat{\mathbb{A}^3} \rightarrow \widehat{\mathbb{A}^3}$  ως προς τις βάσεις  $\mathcal{B}_2(\Pi_1)$  και  $\mathcal{B}_2(\Pi_2)$ .

## 4.4.6 Θεωρούμε την ομοπαράλληλική απεικόνιση

$$f : \mathbb{A}^3 \longrightarrow \mathbb{A}^2, (x_1, x_2, x_3) \longmapsto (2x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3 + 1)$$

και τα ομοπαράλληλικά πλαίσια αντίστοιχα των χώρων  $\mathbb{A}^3$  και του  $\mathbb{A}^2$ ,

$$\Pi_1 = (B_0, B_1, B_2, B_3) \text{ και } \Pi_2 = (C_0, C_1, C_2, C_3),$$

όπου

$$B_0 = (0, 0, 0), B_1 = (1, 0, 0), B_2 = (1, 1, 0), B_3 = (1, 1, 1)$$

και

$$C_0 = (0, 0), C_1 = (1, 1), C_2 = (1, -1).$$

Να βρεθεί ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης  $\hat{f} : \widehat{\mathbb{A}^3} \rightarrow \widehat{\mathbb{A}^2}$  ως προς τις βάσεις  $\mathcal{B}_1(\Pi_1)$  και  $\mathcal{B}_1(\Pi_2)$ .

4.4.7 Θεωρούμε τον ομοπαράλληλικό χώρο  $(\mathcal{P}_{3,1}, \mathcal{P}_{3,0}, +)$  του Παραδείγματος 1.6. Τα πολυώνυμα  $f_i = (i+1)x^i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) αποτελούν ένα ομοπαράλληλικό πλαίσιο  $\Pi_1$  του χώρου  $\mathcal{P}_{3,1}$ . Ας είναι  $F : \mathcal{P}_{3,1} \rightarrow \mathbb{A}^2$  η μοναδική ομοπαράλληλική απεικόνιση με  $F(f_i) = (i, i)$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) και  $\Pi_2$  το ομοπαράλληλικό πλαίσιο του  $\mathbb{A}^2$  το οποίο αποτελείται από τα σημεία  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  και  $(1, 1)$ . Να βρεθεί ο πίνακας της γραμμικοποίησης της  $\hat{F}$  ως προς τις βάσεις  $\mathcal{B}_2(\Pi_1)$  και  $\mathcal{B}_1(\Pi_2)$ .

## Βιβλιογραφία

- [1] M. Berger. *Geometry I*. Universitext. Springer Verlag, 2004.
- [2] J. Gallier. *Curves and Surfaces in Geometric Modelling: Theory and Algorithms*. San Francisco: The Morgan-Kaufmann Series in Computer Graphics. Morgan-Kaufmann Publishers, 1999.
- [3] J. Gallier. *Geometric Methods and Applications*. Springer, 2011.
- [4] L. Ramshaw. *Blossoming: A connect the dots approach to splines*. Palo Alto, California: Digital Systems Research Center: SRC reports, 1987.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

---

# ΠΟΛΥΟΜΟΠΑΡΑΛΛΗΛΙΚΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

---

### Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγονται οι πολυομοπαράλληλικές απεικονίσεις και οι πολικές τους μορφές. Παρουσιάζονται βασικά αποτελέσματα επί αυτών καθώς και η γραμμικοποίησή τους. Σχετικές αναφορές για αυτά τα θέματα ο αναγνώστης μπορεί να βρει στα συγγράμματα τα οποία παρατίθενται στο τέλος του κεφαλαίου.

### 5.1 Πολυγραμμικές και Πολυομοπαράλληλικές Απεικονίσεις

Σ' αυτή την ενότητα εισάγουμε τις πολυομοπαράλληλικές απεικονίσεις και δίνουμε μία γενίκευση της Πρότασης 3.1.

**Ορισμός 5.1.** Ας είναι  $E$  και  $F$  σύνολα. Μία απεικόνιση  $f : E^m \rightarrow F$  καλείται *συμμετρική*, αν για κάθε μετάθεση  $\sigma$  του  $\{1, \dots, m\}$  και  $(x_1, \dots, x_m) \in E^m$  ισχύει:

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) = f(x_1, \dots, x_m).$$

**Παράδειγμα 5.1.** Θεωρούμε τις απεικονίσεις  $\sigma_k^n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ( $k = 0, \dots, n$ ) με

$$\sigma_k^n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_k}, \quad \text{για κάθε } (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Πιο απλά, έχουμε:

$$\begin{aligned} \sigma_0(x_1, \dots, x_n) &= 1, \\ \sigma_1(x_1, \dots, x_n) &= x_1 + \cdots + x_n, \\ \sigma_2(x_1, \dots, x_n) &= x_1x_2 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \sigma_n(x_1, \dots, x_n) &= x_1 \cdots x_n \end{aligned}$$

Οι απεικονίσεις  $\sigma_k$  είναι προφανώς συμμετρικές και καλούνται *στοιχειώδεις συμμετρικές απεικονίσεις*.

**Ορισμός 5.2.** Ας είναι  $V_1, \dots, V_m, W$  πραγματικοί διανυσματικοί χώροι. Μία απεικόνιση  $f : V_1 \times \dots \times V_m \rightarrow W$  καλείται *πολυγραμμική* ή πιο συγκεκριμένα *m-γραμμική*, αν για κάθε  $i \in \{1, \dots, m\}$  και  $x_j \in V_j$ , με  $j \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, m\}$ , η απεικόνιση που ορίζεται από τη σχέση

$$f_i(x) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_m), \text{ για κάθε } x \in V_i,$$

είναι γραμμική.

**Παράδειγμα 5.2.** Η απεικόνιση  $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία ορίζεται από τη σχέση

$$\Phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3x_1y_1 - 2(x_1y_2 + x_2y_1) + 6x_2y_2,$$

για κάθε  $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ , είναι μία συμμετρική 2-γραμμική απεικόνιση.

**Παράδειγμα 5.3.** Οι συμμετρικές πολυγραμμικές απεικονίσεις  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  είναι της μορφής

$$f(x_1, \dots, x_n) = ax_1 \cdots x_n, \text{ για κάθε } (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

όπου  $a \in \mathbb{R}$ . Πράγματι, για  $n = 1$ , είναι γνωστό ότι μία απεικόνιση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι γραμμική, αν και μόνον αν, υπάρχει  $a \in \mathbb{R}$  έτσι, ώστε  $f(x) = ax$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Ας υποθέσουμε ότι κάθε συμμετρική πολυγραμμική απεικόνιση από το  $\mathbb{R}^{n-1}$  στο  $\mathbb{R}$  είναι της παραπάνω μορφής. Θεωρούμε μία συμμετρική πολυγραμμική απεικόνιση  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Τότε, για σταθερό  $x_n \in \mathbb{R}$ , η αντιστοιχία

$$(x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$$

ορίζει μία πολυγραμμική απεικόνιση από το  $\mathbb{R}^{n-1}$  στο  $\mathbb{R}$ . Έτσι, σύμφωνα με την υπόθεση της επαγωγής, υπάρχει  $a(x_n) \in \mathbb{R}$  έτσι, ώστε για κάθε  $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$  να έχουμε:

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = a(x_n)x_1 \cdots x_{n-1}.$$

Επίσης, για σταθερά  $x_1, \dots, x_{n-1}$ , η αντιστοιχία  $x_n \mapsto a(x_n)x_1 \cdots x_{n-1}$  ορίζει μία γραμμική απεικόνιση. Έρα, υπάρχει  $\alpha \in \mathbb{R}$  έτσι, ώστε να ισχύει  $a(x_n) = \alpha x_n$ . Επομένως, έχουμε:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \alpha x_1 \cdots x_n, \text{ για κάθε } (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι μία τέτοια απεικόνιση είναι συμμετρική.

**Παράδειγμα 5.4.** Ας είναι  $\mathbb{R}_2[x]$  ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές βαθμού  $\leq 2$ . Ορίζουμε την απεικόνιση  $\Psi : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$  ως εξής:

$$\Psi(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t) dt,$$

για κάθε  $P, Q \in \mathbb{R}_2[x]$ . Η  $\Psi$  είναι μία συμμετρική διγραμμική απεικόνιση.

**Ορισμός 5.3.** Ας είναι  $E_1, \dots, E_m, E$  ομοπαράλληλοι χώροι. Μία απεικόνιση  $f : E_1 \times \dots \times E_m \rightarrow E$  καλείται *πολυομοπαράλληλη* ή πιο συγκεκριμένα *m-ομοπαράλληλη*, αν για κάθε  $i \in \{1, \dots, m\}$  και  $a_j \in E_j$ , με  $j \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, m\}$ , η απεικόνιση  $f_i$  η οποία ορίζεται από τη σχέση

$$f_i(a) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \dots, a_m), \text{ για κάθε } a \in E_i,$$

είναι ομοπαράλληλη.

Παρατηρούμε αμέσως ότι κάθε πολυγραμμική απεικόνιση είναι πολυομοπαράλληλική απεικόνιση.

**Παράδειγμα 5.5.** Θεωρούμε την απεικόνιση

$$f : \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}, (x_1, x_2) \longmapsto x_1x_2 + 2x_2 + 1.$$

Ας είναι  $a \in \mathbb{A}$ . Τότε, έχουμε την απεικόνιση  $f_1 : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$  η οποία ορίζεται από τη σχέση

$$f_1(x) = f(x, a) = xa + 2a + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{A}.$$

Η αντιστοιχία  $x \mapsto ax$  ορίζει μία γραμμική απεικόνιση και επομένως η  $f_1$  είναι μία ομοπαράλληλική απεικόνιση. Ομοίως, η απεικόνιση  $f_2 : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$  η οποία ορίζεται από τη σχέση

$$f_2(x) = f(a, x) = ax + 2x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{A}$$

είναι μία ομοπαράλληλική απεικόνιση. Συνεπώς, η  $f$  είναι 2-ομοπαράλληλική απεικόνιση. Τέλος, παρατηρούμε ότι η απεικόνιση  $f$  δεν είναι συμμετρική.

**Παράδειγμα 5.6.** Η απεικόνιση

$$f : \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}, (x_1, x_2) \longmapsto ax_1x_2 + b(x_1 + x_2) + c,$$

όπου  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , είναι συμμετρική και 2-ομοπαράλληλική.

**Παράδειγμα 5.7.** Οι στοιχειώδεις συμμετρικές απεικονίσεις  $\sigma_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ( $k = 0, \dots, n$ ) είναι πολυομοπαράλληλικές απεικονίσεις.

**Παράδειγμα 5.8.** Ας είναι  $E_1, \dots, E_m$  ομοπαράλληλικοί χώροι και  $\mathcal{E}$  πραγματικός διανυσματικός χώρος. Θεωρούμε  $a, b \in \mathbb{R}$  και τις πολυομοπαράλληλικές απεικονίσεις  $f, g : E_1 \times \dots \times E_m \rightarrow \mathcal{E}$ . Τότε, έχουμε την απεικόνιση  $af + bg$  την οποία ορίσαμε στο Παράδειγμα 3.2. Για κάθε  $i \in \{1, \dots, m\}$  και  $a_j \in \mathcal{E}_j$ , με  $j \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, m\}$ , οι απεικονίσεις  $f_i, g_i$  οι οποίες ορίζονται από τις σχέσεις

$$f_i(x) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_m)$$

και

$$g_i(x) = g(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_m),$$

για κάθε  $x \in E_i$ , είναι ομοπαράλληλικές. Έτσι, από το Παράδειγμα 3.2, έχουμε ότι οι απεικονίσεις  $af_i + bg_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) είναι ομοπαράλληλικές. Συνεπώς, η απεικόνιση  $af + bg$  είναι πολυομοπαράλληλική.

Ας είναι  $E$  ομοπαράλληλικός χώρος,  $\mathcal{F}$  πραγματικός διανυσματικός χώρος και  $f : E^m \rightarrow \mathcal{F}$  είναι μία  $m$ -ομοπαράλληλική απεικόνιση. Για κάθε  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m) \in \vec{E}$  και  $a = (a_1, \dots, a_m) \in E^m$  θέτουμε:

$$\Delta_{\vec{v}_i} f(a) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + \vec{v}_i, a_{i+1}, \dots, a_m) - f(a) \quad (i = 1, \dots, m).$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι ισχύει:

$$\begin{aligned} \Delta_{v_{k+1}} \cdots \Delta_{\vec{v}_1} f(a) = \\ \Delta_{v_k} \cdots \Delta_{v_1} f(a_1, \dots, a_{k+1} + \vec{v}_{k+1}, \dots, a_m) - \Delta_{v_k} \cdots \Delta_{v_1} f(a) \end{aligned}$$

με  $1 \leq k \leq m-1$ . Έτσι, για κάθε  $k = 1, \dots, m$  ορίζεται η απεικόνιση  $\Delta_{\vec{v}_k} \cdots \Delta_{\vec{v}_1} f$ . Στο παρακάτω λήμμα αποδεικνύονται δύο ιδιότητες της που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια.

**Λήμμα 5.1.** (α) Η απεικόνιση  $\Delta_{\vec{v}_k} \cdots \Delta_{\vec{v}_1} f$  είναι  $k$ -γραμμική ως προς  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  και  $(m-k)$ -ομοπαράλληλική ως προς  $a_{k+1}, \dots, a_m$ .

(β) Ισχύει:

$$\Delta_{\vec{v}_m} \cdots \Delta_{\vec{v}_1} f(a) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} f(a_1, \dots, a_{i_1} + \vec{v}_{i_1}, \dots, a_{i_k} + \vec{v}_{i_k}, \dots, a_m).$$

*Απόδειξη.* (α) Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή επί του  $k$ . Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\Delta_{\vec{v}_1} f(a) = f(a_1 + \vec{v}_1, a_2, \dots, a_m) - f(a).$$

Καθώς η  $f$  είναι  $m$ -ομοπαράλληλική, ισχύει:

$$f(a_1 + \vec{v}_1, a_2, \dots, a_m) = f(a) + \vec{f}_1(\vec{v}_1)$$

και επομένως  $\Delta_{\vec{v}_1} f(a) = \vec{f}_1(\vec{v}_1)$ . 'ρα, η  $\Delta_{\vec{v}_1} f(a)$  είναι γραμμική ως προς  $\vec{v}_1$ . Επίσης, αν  $(b_i, \lambda_i)$  ( $i = 0, \dots, s$ ) είναι βεβαρημένα σημεία του  $E$  με  $\lambda_1 + \dots + \lambda_s = 1$ , τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} f(a_1 + \vec{v}_1, \sum_{i=0}^s \lambda_i b_i, a_3, \dots, a_m) - f(a_1, \sum_{i=0}^s \lambda_i b_i, a_3, \dots, a_m) = \\ \sum_{i=0}^s \lambda_i (f(a_1 + \vec{v}_1, b_i, a_3, \dots, a_m) - f(a_1, b_i, a_3, \dots, a_m)). \end{aligned}$$

Επομένως, η  $\Delta_{\vec{v}_1} f(a)$  είναι ομοπαράλληλική ως προς  $a_2$ . Ομοίως αποδεικνύεται ότι είναι ομοπαράλληλική ως προς  $a_3, \dots, a_m$ .

Υποθέτουμε στη συνέχεια ότι η  $\Delta_{v_{k+1}} \cdots \Delta_{v_1} f(a)$  είναι γραμμική ως προς  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  και  $(m-k)$ -ομοπαράλληλική ως προς  $a_{k+1}, \dots, a_m$ . Επειδή η  $\Delta_{v_{k+1}} \cdots \Delta_{v_1} f(a)$  είναι ομοπαράλληλική ως προς  $a_{k+1}$ , συνεπάγεται ότι η απεικόνιση

$$\begin{aligned} \Delta_{v_{k+1}} \cdots \Delta_{v_1} f(a) = \\ \Delta_{v_k} \cdots \Delta_{\vec{v}_1} f(a_1, \dots, a_{k+1} + \vec{v}_{k+1}, \dots, a_m) - \Delta_{v_k} \cdots \Delta_{v_1} f(a) \end{aligned}$$

είναι γραμμική ως προς  $\vec{v}_{k+1}$ . Καθώς όμως η  $\Delta_{v_{k+1}} \cdots \Delta_{v_1} f$  είναι διαφορά δύο γραμμικών απεικονίσεων ως προς  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ , είναι γραμμική και ως προς  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ . Τέλος, εργαζόμενοι όπως και στην περίπτωση  $k = 1$ , βλέπουμε ότι η  $\Delta_{v_{k+1}} \cdots \Delta_{v_1} f$  είναι ομοπαράλληλική ως προς  $a_{k+2}, \dots, a_m$ .

(β) Έχουμε:

$$\Delta_{\vec{v}_1} f(a) = f(a_1 + \vec{v}_1, a_2, \dots, a_m) - f(a)$$

και

$$\begin{aligned} \Delta_{\vec{v}_2} \Delta_{\vec{v}_1} f(a) = f(a_1 + \vec{v}_1, a_2 + \vec{v}_2, a_3, \dots, a_m) - \\ f(a_1 + \vec{v}_1, a_2, \dots, a_m) - f(a_1, a_2 + \vec{v}_2, a_3, \dots, a_m) + f(a). \end{aligned}$$

Συμβολίζουμε με  $A_{i_1, \dots, i_k}$  το στοιχείο του  $\mathcal{E}^m$  τα οποία στη  $i_j$ -θέση έχουν το στοιχείο  $a_j + \vec{v}_{i_j}$  και στη  $s$ -θέση με  $s \notin \{i_1, \dots, i_k\}$  το στοιχείο  $a_s$ . Υποθέτουμε ότι ισχύει:

$$\Delta_{\vec{v}_l} \cdots \Delta_{\vec{v}_1} f(a) = \sum_{k=0}^l (-1)^{l-k} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq l} f(A_{i_1, \dots, i_k}).$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \Delta_{\vec{v}_{l+1}} \cdots \Delta_{\vec{v}_1} f(a) &= \\ \Delta_{\vec{v}_l} \cdots \Delta_{\vec{v}_1} f(a_1, \dots, a_l, a_{l+1} + \vec{v}_{l+1}, a_{l+2}, \dots, a_m) &- \Delta_{\vec{v}_l} \cdots \Delta_{\vec{v}_1} f(a) \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες ισότητες, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \Delta_{\vec{v}_{l+1}} \cdots \Delta_{\vec{v}_1} f(a) &= \sum_{k=0}^l (-1)^{l-k} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq l} f(A_{i_1, \dots, i_k, l+1}) + \\ &\sum_{k=0}^l (-1)^{l-k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq l} f(A_{i_1, \dots, i_k}). \end{aligned}$$

Έτσι, παίρνουμε:

$$\Delta_{\vec{v}_{l+1}} \cdots \Delta_{\vec{v}_1} f(a) = \sum_{k=0}^{l+1} (-1)^{l+1-k} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq l+1} f(A_{i_1, \dots, i_k}).$$

Οπότε, για  $l = m$  έχουμε το ζητούμενο. □

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 5.1 για να αποδείξουμε το παρακάτω αποτέλεσμα. Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε θετικό ακέραιο  $n$ , ορίζουμε

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

αν  $i = 0, 1, \dots, n$  και 0 διαφορετικά.

**Θεώρημα 5.1.** *Ας είναι  $\mathcal{E}$  και  $\mathcal{F}$  ομοπαράλληλοι χώροι,  $m$  θετικός ακέραιος και  $\Sigma_m = \{1, \dots, m\}$ . Αν  $f : \mathcal{E}^m \rightarrow \mathcal{F}$  είναι μία  $m$ -ομοπαράλληλη απεικόνιση, τότε υπάρχουν  $2^m - 1$  μοναδικώς ορισμένες πολυγραμμικές απεικονίσεις  $\vec{f}_S : \vec{\mathcal{E}}^k \rightarrow \vec{\mathcal{F}}$ , όπου  $\emptyset \neq S \subseteq \Sigma_m$ ,  $k = |S|$ , ώστε να ισχύει:*

$$f(a_1 + \vec{v}_1, \dots, a_m + \vec{v}_m) = f(a_1, \dots, a_m) + \sum_{\substack{S \subseteq \Sigma_m, |S|=k \geq 1 \\ S = \{i_1, \dots, i_k\}}} \vec{f}_S(\vec{v}_{i_1}, \dots, \vec{v}_{i_k}),$$

για κάθε  $a_1, \dots, a_m \in \mathcal{E}$  και  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \in \vec{\mathcal{E}}$ . Αντιστρόφως, κάθε τέτοια απεικόνιση είναι  $m$ -ομοπαράλληλη.

*Απόδειξη.* Πρώτα θα δείξουμε ότι η απόδειξη της πρότασης ανάγεται στην περίπτωση όπου η  $f$  είναι γραμμική. Παίρνουμε  $b \in F$  και ορίζουμε

$$h : E^m \rightarrow \vec{F}, a \mapsto \overrightarrow{bf(a)}.$$

Έτσι, έχουμε  $f(a) = b + h(a)$ . Θα δείξουμε ότι η  $h$  είναι  $m$ -ομοπαράλληλη. Πράγματι, για κάθε  $i \in \{1, \dots, m\}$  και  $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m \in E$  ορίζουμε τις απεικονίσεις

$$f_i : E \rightarrow F, x \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_m)$$

και

$$h_i : E \rightarrow \vec{F}, x \mapsto h(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_m).$$

Καθώς η  $f$  είναι  $m$ -ομοπαράλληλη, για  $a = (a_1, \dots, a_m)$  και  $\vec{v} \in \vec{E}$  έχουμε:

$$\begin{aligned} h_i(a_i + \vec{v}) &= h(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + \vec{v}, a_{i+1}, \dots, a_m) \\ &= \overrightarrow{bf(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + \vec{v}, a_{i+1}, \dots, a_m)} \\ &= \overrightarrow{b(f(a) + \vec{f}_i(\vec{v}))}. \end{aligned}$$



Από την άλλη πλευρά, ισχύει:

$$\overrightarrow{b + b(f(a) + \vec{f}_i(\vec{u}))} = f(a) + \vec{f}_i(\vec{u}),$$

απ' όπου έχουμε:

$$\overrightarrow{bf(a)} = \overrightarrow{b(f(a) + \vec{f}_i(\vec{u}))} - \vec{f}_i(\vec{u}).$$

Έτσι, παίρνουμε:

$$h_i(a_i + \vec{u}) = \overrightarrow{bf(a)} + \vec{f}_i(\vec{u}) = h_i(a) + \vec{f}_i(\vec{u}).$$

Ήρα, η  $h_i$  είναι ομοπαράλληλική απεικόνιση με αντίστοιχη γραμμική απεικόνιση την  $\vec{f}_i$ , και κατά συνέπεια η απεικόνιση  $h$  είναι  $m$ -ομοπαράλληλική.

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι το  $\mathcal{F}$  είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος. Ας είναι  $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathcal{E}^m$  και  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \in \mathcal{E}$ . Από το Λήμμα 5.1 έπεται ότι η απεικόνιση  $\Delta_{\vec{v}_m} \cdots \Delta_{\vec{v}_1} f(a)$  είναι  $m$ -γραμμική απεικόνιση και ισχύει:

$$f(a_1 + \vec{v}_1, \dots, a_m + \vec{v}_m) = \Delta_{\vec{v}_m} \cdots \Delta_{\vec{v}_1} f(a) + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} f(a_1, \dots, a_{i_1} + \vec{v}_{i_1}, \dots, a_{i_k} + \vec{v}_{i_k}, \dots, a_m).$$

Για  $m = 1$ , η πρόταση αληθεύει. Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάθε ακέραιο  $k$  με  $1 \leq k \leq m - 1$ . Κάθε όρος  $f(a_1, \dots, a_{i_1} + \vec{v}_{i_1}, \dots, a_{i_k} + \vec{v}_{i_k}, \dots, a_m)$  του παραπάνω αθροίσματος περιέχει το πολύ  $m - 1$  από τα  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$  και επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε την υπόθεση της επαγωγής. Έτσι, έχουμε:

$$f(a_1, \dots, a_{i_1} + \vec{v}_{i_1}, \dots, a_{i_k} + \vec{v}_{i_k}, \dots, a_m) = f(a) + \sum_{\substack{S \subseteq \{i_1, \dots, i_k\}, |S| \geq 1 \\ S = \{j(i_1), \dots, j(i_k)\}}} \vec{f}_S(\vec{v}_{j(i_1)}, \dots, \vec{v}_{j(i_k)}),$$

όπου  $\vec{f}_S$  είναι πολυγραμμικές απεικονίσεις. Παρατηρούμε ότι το πλήθος των  $l$ -γραμμικών απεικονίσεων  $f_S$  είναι  $2^k - 1$ . Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω ιδιότητες, προκύπτει:

$$f(a_1 + \vec{v}_1, \dots, a_m + \vec{v}_m) = \Delta_{\vec{v}_m} \cdots \Delta_{\vec{v}_1} f(a) + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \left( f(a) + \sum_{\substack{S \subseteq \{i_1, \dots, i_k\}, |S| \geq 1 \\ S = \{j(i_1), \dots, j(i_k)\}}} \vec{f}_S(\vec{v}_{j(i_1)}, \dots, \vec{v}_{j(i_k)}) \right)$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} 1 &= \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-k-1} \binom{m}{k} \\ &= - \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} - 1 + 1 \\ &= -(1-1)^m + 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Έτσι, παίρνουμε:

$$f(a_1 + \vec{v}_1, \dots, a_m + \vec{v}_m) = f(a) + \sum_{\substack{S \subseteq \Sigma_m, |S| = k \geq 1 \\ S = \{i_1, \dots, i_k\}}} F_S(\vec{v}_{i_1}, \dots, \vec{v}_{i_k}),$$

όπου  $F_S : \vec{\mathcal{E}}^k \rightarrow \mathcal{F}$ , είναι πολυγραμμικές απεικονίσεις. Ας σημειωθεί ότι  $F_{\Sigma_m} = \Delta_{\vec{v}_m} \cdots \Delta_{\vec{v}_1} f(a)$ .

Το πλήθος των 1-γραμμικών απεικονίσεων είναι  $\binom{m}{1}$ , το πλήθος των 2-γραμμικών απεικονίσεων είναι  $\binom{m}{2}$ , ..., των  $(m-1)$ -γραμμικών απεικονίσεων  $\binom{m}{m-1}$ . Έτσι, έχουμε

$$\binom{m}{1} + \cdots + \binom{m}{m-1} + 1 - 1 = 2^m - 1$$

πολυγραμμικές απεικονίσεις.

Τέλος, θα δείξουμε με επαγωγή επί του  $m$  ότι οι παραπάνω πολυγραμμικές απεικονίσεις είναι μοναδικώς ορισμένες. Ας είναι  $|S| = 1$ . Για  $S = \{i\}$ , για κάθε  $a = (a_1, \dots, a_n)$  και  $\vec{v}_i \in \vec{\mathcal{E}}$  έχουμε:

$$F_{\{i\}}(\vec{v}_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + \vec{v}_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a).$$

Ήρα, οι γραμμικές απεικονίσεις  $F_{\{i\}}$  είναι μοναδικά ορισμένες. Υποθέτουμε στη συνέχεια ότι οι απεικονίσεις  $F_S$  με  $|S| = k-1$  είναι μοναδικώς ορισμένες. Στη συνέχεια παίρνουμε  $S = \{i_1, \dots, i_k\}$ . Τότε, έχουμε:

$$F_S(\vec{v}_{i_1}, \dots, \vec{v}_{i_k}) = f(a_1, \dots, a_{i_1} + \vec{v}_{i_1}, \dots, a_{i_k} + \vec{v}_{i_k}, \dots, a_m) -$$

$$f(a) - \sum_{\substack{T \subset S, |T|=1 \\ T = \{j(i_1), \dots, j(i_k)\}}} F_T(\vec{v}_{j(i_1)}, \dots, \vec{v}_{j(i_k)})$$

και οι απεικονίσεις  $F_T$  είναι μοναδικώς ορισμένες. Ήρα, η απεικόνιση  $F_S$  είναι μοναδικώς ορισμένη.  $\square$

**Πόρισμα 5.1.** Ας είναι  $\mathcal{E}$  και  $\mathcal{F}$  ομοπαράλληλοι χώροι,  $m$  θετικός ακέραιος και  $f : \mathcal{E}^m \rightarrow \mathcal{F}$  μία συμμετρική  $m$ -ομοπαράλληλη απεικόνιση. Τότε, υπάρχουν  $m$  μοναδικώς ορισμένες συμμετρικές πολυγραμμικές απεικονίσεις  $\vec{f}_k : \vec{\mathcal{E}}^k \rightarrow \vec{\mathcal{F}}$  ( $k = 1, \dots, m$ ), ώστε να ισχύει:

$$f(a_1 + \vec{v}_1, \dots, a_m + \vec{v}_m) = f(a_1, \dots, a_m) + \sum_{k=1}^m \sum_{i_1 < \dots < i_k} \vec{f}_k(\vec{v}_{i_1}, \dots, \vec{v}_{i_k}),$$

για κάθε  $a_1, \dots, a_m \in \mathcal{E}$  και  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \in \vec{\mathcal{E}}$ . Αντιστρόφως, κάθε τέτοια απεικόνιση είναι συμμετρική και  $m$ -ομοπαράλληλη.

*Απόδειξη.* Για κάθε  $k \in \{1, \dots, m\}$  και ακολουθίες  $(i_1, \dots, i_k), (j_1, \dots, j_k)$  με  $i_1 < \dots < i_k$  και  $j_1 < \dots < j_k$  υπάρχει μετάθεση  $\pi$  του  $\{1, \dots, m\}$  τέτοια, ώστε  $\pi(i_1) = j_1, \dots, \pi(i_k) = j_k$ . Επειδή η  $f$  είναι συμμετρική, ισχύει:

$$f(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(m)}) = f(x_1, \dots, x_m), \quad \forall (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{E}^m.$$

Έτσι, από το Θεώρημα 5.1 και πιο συγκεκριμένα από τη μοναδικότητα των απεικονίσεων  $\vec{f}_S$ , έχουμε

$$\vec{f}_{\{i_1, \dots, i_k\}} = \vec{f}_{\{j_1, \dots, j_k\}}$$

και επομένως κάθε απεικόνιση  $\vec{f}_{\{i_1, \dots, i_k\}}$  είναι συμμετρική. Θέτοντας  $\vec{f}_k = \vec{f}_{\{i_1, \dots, i_k\}}$  παίρνουμε:

$$f(a_1 + \vec{v}_1, \dots, a_m + \vec{v}_m) = f(a_1, \dots, a_m) + \sum_{k=1}^m \sum_{\substack{S \subset \Sigma_m, \\ S = \{i_1, \dots, i_k\}}} \vec{f}_k(\vec{v}_{i_1}, \dots, \vec{v}_{i_k}),$$

για κάθε  $a_1, \dots, a_m \in \mathcal{E}$  και  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \in \vec{\mathcal{E}}$ .  $\square$

**Παράδειγμα 5.9.** Ας είναι  $f : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  συμμετρική 2-ομοπαράλληλική απεικόνιση. Θεωρούμε το ομοπαράλληλικό πλαίσιο  $(0, 1)$  του  $\mathbb{A}$ . Τότε, κάθε  $x \in \mathbb{A}$  γράφεται:

$$x = 0 + x\vec{01} = 0 + x(1 - 0).$$

Από το Πόρισμα 5.1 έπεται ότι υπάρχει γραμμική απεικόνιση  $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και μία συμμετρική διγραμμική απεικόνιση  $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , ώστε για κάθε  $(x_1, x_2) \in \mathbb{A} \times \mathbb{A}$  να ισχύει:

$$f(x_1, x_2) = f(0, 0) + f_1(x_1) + f_1(x_2) + f_2(x_1, x_2).$$

Στη συνέχεια, από το Παράδειγμα 5.3, έχουμε ότι υπάρχουν  $a, b \in \mathbb{R}$  με  $f_2(x_1, x_2) = ax_1x_2$ ,  $f_1(x) = bx$ . Τέλος, θέτοντας  $c = f(0, 0)$ , παίρνουμε:

$$f(x_1, x_2) = ax_1x_2 + b(x_1 + x_2) + c.$$

Γενικότερα, αν  $f : \mathbb{A}^m \rightarrow \mathbb{A}$  είναι μία συμμετρική  $m$ -ομοπαράλληλική απεικόνιση, τότε, συνδυάζοντας το Πόρισμα 5.1 με το Παράδειγμα 5.3, για κάθε  $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{A}^m$  παίρνουμε:

$$f(x_1, \dots, x_m) = f(0, \dots, 0) + \sum_{k=1}^m a_k \sum_{i_1 < \dots < i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k}.$$

## 5.2 Πολικές Μορφές

Ας είναι  $\mathcal{V}$  και  $\mathcal{W}$  πραγματικοί διανυσματικοί χώροι.

**Ορισμός 5.4.** Μία απεικόνιση  $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  καλείται ομογενής πολωνυμική απεικόνιση πολικού βαθμού  $m$ , αν υπάρχει μία συμμετρική  $m$ -γραμμική απεικόνιση  $\Phi : \mathcal{V}^m \rightarrow \mathcal{W}$  τέτοια, ώστε να ισχύει:

$$\varphi(v) = \Phi(v, \dots, v), \quad \text{για κάθε } v \in \mathcal{V}.$$

Η  $\Phi$  καλείται  $m$ -πολική μορφή της  $\varphi$ .

**Παρατήρηση 5.1.** Ας είναι  $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  μία ομογενής πολωνυμική απεικόνιση πολικού βαθμού  $m$  και  $\Phi$  η αντίστοιχη πολική μορφή της. Τότε ισχύει:

$$\varphi(\lambda x) = \lambda^m \varphi(x), \quad \text{για κάθε } \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } x \in \mathcal{V}.$$

Πράγματι, έχουμε:

$$\varphi(\lambda x) = \Phi(\lambda x, \dots, \lambda x) = \lambda^m \Phi(x, \dots, x) = \lambda^m \varphi(x).$$

**Παράδειγμα 5.10.** Μία ομογενής πολωνυμική απεικόνιση πολικού βαθμού 1 δεν είναι παρά μία γραμμική απεικόνιση.

**Παράδειγμα 5.11.** Από το Παράδειγμα 5.3 έχουμε ότι οι συμμετρικές πολυγραμμικές απεικονίσεις  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  είναι της μορφής

$$f(x_1, \dots, x_m) = ax_1 \cdots x_m, \quad \text{για κάθε } (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m,$$

όπου  $a \in \mathbb{R}$ . Οπότε, κάθε ομογενής πολωνυμική απεικόνιση πολικού βαθμού  $m$ ,  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι της μορφής

$$\varphi(x) = ax^m, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

**Παράδειγμα 5.12.** Η απεικόνιση

$$\Phi : (\mathbb{R}^n)^2 \longrightarrow \mathbb{R}, ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \longmapsto x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

είναι μία συμμετρική 2-γραμμική απεικόνιση. Άρα, η απεικόνιση

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_1^2 + \dots + x_n^2$$

είναι μία ομογενής πολωνυμική απεικόνιση πολικού βαθμού 2.

**Ορισμός 5.5.** Καλούμε *πολωνυμική απεικόνιση πολικού βαθμού  $m$*  κάθε απεικόνιση  $h : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  για την οποία υπάρχουν  $m$  συμμετρικές  $k$ -γραμμικές απεικονίσεις  $f_k : \mathcal{V}^k \rightarrow \mathcal{W}$  ( $k = 1, \dots, m$ ) και  $f_0 \in \mathcal{W}$  έτσι, ώστε

$$h(v) = f_m(v, \dots, v) + f_{m-1}(v, \dots, v) + \dots + f_1(v) + f_0,$$

για κάθε  $v \in \mathcal{V}$ .

**Παράδειγμα 5.13.** Από το Παράδειγμα 5.11 έχουμε ότι κάθε ομογενής πολωνυμική απεικόνιση πολικού βαθμού  $m$ ,  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι της μορφής  $\varphi(x) = ax^m$ , όπου  $a \in \mathbb{R}$ . Έτσι, έχουμε ότι οι πολωνυμικές απεικονίσεις πολικού βαθμού  $m$ ,  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , είναι της μορφής

$$h(x) = a_m x^m + \dots + a_0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

όπου  $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ .

Ας είναι  $h : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  μία πολωνυμική απεικόνιση πολικού βαθμού  $m$  η οποία ορίζεται από τις συμμετρικές γραμμικές απεικονίσεις  $f_k : \mathcal{V}^k \rightarrow \mathcal{W}$  ( $k = 1, \dots, m$ ) και  $f_0 \in \mathcal{W}$ . Θεωρούμε την απεικόνιση  $g : \mathcal{V}^m \rightarrow \mathcal{W}$  η οποία ορίζεται ως εξής:

$$g(v_1, \dots, v_m) = \sum_{k=1}^m \binom{m}{k}^{-1} \left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} f_k(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) \right) + f_0.$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η  $g$  είναι συμμετρική  $m$ -ομοπαράλληλική απεικόνιση. Επίσης, για κάθε  $v \in \mathcal{V}$  ισχύει:

$$g(v, \dots, v) = f_m(v, \dots, v) + \dots + f_1(v) + f_0 = h(v).$$

Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι η απεικόνιση  $h : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ , ορίζεται από τη σχέση

$$h(v) = f(v, \dots, v), \quad \text{για κάθε } v \in \mathcal{V},$$

όπου  $f : \mathcal{V}^m \rightarrow \mathcal{W}$  είναι μία συμμετρική  $m$ -ομοπαράλληλική απεικόνιση. Από το Πόρισμα 5.1 έπεται ότι υπάρχουν  $m$  μοναδικώς ορισμένες συμμετρικές πολυγραμμικές απεικονίσεις  $f_k : \mathcal{V}^k \rightarrow \mathcal{W}$  ( $k = 1, \dots, m$ ), ώστε να ισχύει:

$$f(v_1, \dots, v_m) = f(0, \dots, 0) + \sum_{k=1}^m \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_k(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}),$$

για κάθε  $v_1, \dots, v_m \in \mathcal{V}$ . Άρα, για κάθε  $v \in \mathcal{V}$ , έχουμε:

$$h(v) = f(v, \dots, v) = f(0, \dots, 0) + \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} f_k(v, \dots, v).$$

Επομένως, η  $h$  είναι μία πολυωνυμική απεικόνιση πολικού βαθμού  $m$ . Έτσι, βλέπουμε ότι μία πολυωνυμική απεικόνιση πολικού βαθμού  $m$  μπορεί να οριστεί από μία συμμετρική  $m$ -ομοπαράλληλική απεικόνιση  $f : \mathcal{V}^m \rightarrow \mathcal{W}$ .

Στην επόμενη πρόταση θα χρησιμοποιήσουμε την ποσότητα

$$\binom{m}{k_1, \dots, k_n} = \frac{m!}{k_1! \cdots k_n!},$$

με  $k_1 + \cdots + k_n = m$ . Η ποσότητα αυτή είναι το πλήθος των διαφορετικών μεταθέσεων των  $m$  αντικειμένων όταν  $n_1$  από αυτά είναι ίδια,  $n_2$  από αυτά είναι ίδια, κ.ο.κ.

**Πρόταση 5.1.** *Ας είναι  $f : \mathcal{V}^m \rightarrow \mathcal{W}$  μία συμμετρική  $m$ -γραμμική απεικόνιση και  $\{e_1, \dots, e_n\}$  μία βάση του  $\mathcal{V}$ . Αν  $v_j = v_{1j}e_1 + \cdots + v_{nj}e_n$  ( $j = 1, \dots, m$ ), τότε έχουμε:*

$$f(v_1, \dots, v_m) = \sum_{\substack{k_1 + \cdots + k_n = m \\ k_1 \geq 0, \dots, k_n \geq 0}} \left( \sum_{\substack{I_1 \cup \cdots \cup I_n = \{1, \dots, m\} \\ I_i \cap I_j = \emptyset, i \neq j, |I_i| = k_i}} \prod_{j=1}^n \prod_{i_j \in I_j} v_{j, i_j} \right) f(\underbrace{e_1, \dots, e_1}_{k_1}, \dots, \underbrace{e_n, \dots, e_n}_{k_n}).$$

Επίσης, η ομογενής πολυωνυμική απεικόνιση  $h$  που ορίζεται από την  $f$  δίνεται από τη σχέση:

$$h(v) = \sum_{\substack{k_1 + \cdots + k_n = m \\ k_1 \geq 0, \dots, k_n \geq 0}} \binom{m}{k_1, \dots, k_n} v_1^{k_1} \cdots v_n^{k_n} f(\underbrace{e_1, \dots, e_1}_{k_1}, \dots, \underbrace{e_n, \dots, e_n}_{k_n}),$$

για κάθε  $v = v_1e_1 + \cdots + v_ne_n \in \mathcal{V}$ .

*Απόδειξη.* Καθώς η απεικόνιση  $f$  είναι πολυγραμμική, έχουμε:

$$f(v_1, \dots, v_m) = \sum_{(i_1, \dots, i_m) \in \{1, \dots, n\}^m} v_{i_1, 1} \cdots v_{i_m, m} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_m}).$$

Επίσης, η συμμετρικότητα της  $f$  δίνει:

$$f(e_{i_1}, \dots, e_{i_m}) = f(\underbrace{e_1, \dots, e_1}_{k_1}, \dots, \underbrace{e_n, \dots, e_n}_{k_n}),$$

για κάποιους φυσικούς αριθμούς  $k_1, \dots, k_n$ . Έτσι, μπορούμε να γράψουμε το παραπάνω άθροισμα χρησιμοποιώντας  $n$ -άδες  $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$  με  $k_1 + \cdots + k_n = m$  και σύνολα  $I_1, \dots, I_n$  ξένα μεταξύ τους ανά δύο με  $|I_j| = k_j$  και  $I_1 \cup \cdots \cup I_n = \{1, \dots, m\}$  ώστε το  $I_j$  ν' αντιστοιχεί στο  $e_j$ . Έτσι, προκύπτει η πρώτη ισότητα της πρότασης.

Για τον υπολογισμό του  $h(v) = f(v, \dots, v)$  θεωρούμε το ίδιο γινόμενο  $v_1^{k_1} \cdots v_n^{k_n}$  τόσες φορές όσες είναι το πλήθος των τρόπων επιλογής  $n$  ξένων ανά δύο συνόλων  $I_1, \dots, I_n$  με  $|I_j| = k_j$  και  $I_1 \cup \cdots \cup I_n = \{1, \dots, m\}$  το οποίο ισούται με

$$\binom{m}{k_1, \dots, k_n}.$$

Έτσι, παίρνουμε τη δεύτερη ισότητα της πρότασης. □

Ας είναι  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$  ομοπαράλληλικοί χώροι και  $h : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  μία απεικόνιση.

**Ορισμός 5.6.** Η  $h$  καλείται ομοπαράλληλική πολωννυμική απεικόνιση πολικού βαθμού  $m$ , αν υπάρχει μία συμμετρική  $m$ -ομοπαράλληλική απεικόνιση  $f : \mathcal{E}^m \rightarrow \mathcal{F}$  έτσι, ώστε

$$h(a) = f(a, \dots, a),$$

για κάθε  $a \in \mathcal{E}$ . Η  $f$  καλείται  $m$ -πολική μορφή της  $h$ .

Παρατηρούμε αμέσως ότι οι πολωννυμικές απεικονίσεις πολικού βαθμού  $m$  είναι ομοπαράλληλικές πολωννυμικές απεικονίσεις πολικού βαθμού  $m$ .

**Παράδειγμα 5.14.** Ας είναι  $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}$  με  $a_m \neq 0$ . Θεωρούμε την απεικόνιση  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία ορίζεται από τη σχέση

$$h(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{A}.$$

Από το Παράδειγμα 5.13 έχουμε ότι η  $h$  είναι πολωννυμική απεικόνιση πολικού βαθμού  $m$ . Επομένως, η  $h$  είναι ομοπαράλληλική πολωννυμική απεικόνιση πολικού βαθμού  $m$ .

**Παράδειγμα 5.15.** Η απεικόνιση

$$f : \mathbb{A}^4 \rightarrow \mathbb{A}, (x, y, z, w) \mapsto xy + xz + xw + yz + yw + zw$$

είναι 4-ομοπαράλληλική. Επομένως, η απεικόνιση

$$h : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}, x \mapsto 6x^2$$

είναι ομοπαράλληλική πολωννυμική απεικόνιση πολικού βαθμού 4 με αντίστοιχη πολική μορφή την  $f$ .

Συνδυάζοντας το Πόρισμα 5.1 και την Πρόταση 5.1 παίρνουμε το εξής αποτέλεσμα:

**Πρόταση 5.2.** Ας είναι  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$  ομοπαράλληλικοί χώροι και  $f : \mathcal{E}^m \rightarrow \mathcal{F}$  μία συμμετρική  $m$ -ομοπαράλληλική απεικόνιση. Αν  $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  είναι μία βάση του  $\mathcal{E}$ , τότε για κάθε  $\vec{v}_j = v_{1j}\vec{e}_1 + \dots + v_{nj}\vec{e}_n$  και  $a_j \in \mathcal{E}$  ( $j = 1, \dots, m$ ) έχουμε:

$$f(a_1 + \vec{v}_1, \dots, a_m + \vec{v}_m) = b + \sum_{p=1}^m \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = p \\ k_1 \geq 0, \dots, k_n \geq 0}} \left( \sum_{\substack{I_1 \cup \dots \cup I_n = \{i_1, \dots, i_p\} \\ I_k \cap I_l = \emptyset, k \neq l, |I_k| = k_j}} \prod_{j=1}^n \prod_{s_j \in I_j} v_{j,s_j} \right) \vec{w}_{k_1, \dots, k_n},$$

για κάποιο  $b \in \mathcal{F}$  και  $\vec{w}_{k_1, \dots, k_n} \in \mathcal{F}$ . Αντιστρόφως, κάθε τέτοια απεικόνιση είναι συμμετρική και  $m$ -ομοπαράλληλική. Επίσης, η ομοπαράλληλική πολωννυμική απεικόνιση  $h$  η οποία ορίζεται από την  $f$  δίνεται, για κάθε  $a \in \mathcal{E}$  και κάθε διάνυσμα  $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + \dots + v_n\vec{e}_n$  του  $\mathcal{E}$ , από τη σχέση

$$h(a + \vec{v}) = b + \sum_{p=1}^m \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = p \\ k_1 \geq 0, \dots, k_n \geq 0}} v_1^{k_1} \dots v_n^{k_n} \vec{u}_{k_1, \dots, k_n},$$

όπου  $b \in \mathcal{F}$  και  $\vec{u}_{k_1, \dots, k_n} \in \mathcal{F}$ .

**Παράδειγμα 5.16.** Οι συμμετρικές 3-ομοπαράλληλικές απεικονίσεις  $f : \mathbb{A}^3 \rightarrow \mathbb{A}^2$  είναι της μορφής:

$$f(x, y, z) = b + (x + y + z)\vec{w}_1 + (xy + yz + zx)\vec{w}_2 + xyz\vec{w}_3,$$

για κάθε  $(x, y, z) \in \mathbb{A}^3$ , όπου  $b \in \mathbb{A}^2$  και  $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3 \in \mathbb{R}^2$ . Η αντίστοιχη ομοπαράλληλική πολωννυμική απεικόνιση δίνεται από τον τύπο:

$$h(x) = b + x\vec{u}_1 + x^2\vec{u}_2 + x^3\vec{u}_3,$$

για κάθε  $x \in \mathbb{A}$  (όπου  $\vec{u}_1 = 3\vec{w}_1, \vec{u}_2 = 3\vec{w}_2$  και  $\vec{u}_3 = \vec{w}_3$ ).

Τελειώνοντας αυτή την ενότητα θα δείξουμε στην επομένη πρόταση ότι η πολική μορφή μίας ομοπαράλληλης πολωννυμικής απεικόνισης είναι μοναδική.

**Πρόταση 5.3.** *Ας είναι  $\mathcal{E}$  και  $\mathcal{F}$  ομοπαράλληλοι χώροι και  $h : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  ομοπαράλληλη πολωννυμική απεικόνιση πολικού βαθμού  $m$ . Τότε, η πολική μορφή  $f : \mathcal{E}^m \rightarrow \mathcal{F}$  του  $h$  είναι μοναδική και δίνεται από τον τύπο:*

$$f(a_1, \dots, a_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\substack{H \subseteq \{1, \dots, m\} \\ |H|=k \geq 1}} (-1)^{m-k} k^m h \left( \sum_{i \in H} \frac{1}{k} a_i \right).$$

*Απόδειξη.* Ας είναι  $\Sigma_m = \{1, \dots, m\}$ . Συμβολίζουμε με  $C$  το σύνολο των απεικονίσεων  $\eta : \Sigma_m \rightarrow \{0, 1\}$  για τις οποίες υπάρχει  $i \in \Sigma_m$  με  $\eta(i) \neq 0$ . Τότε, η ποσότητα

$$E = \sum_{\substack{H \subseteq \Sigma_m \\ |H|=k \geq 1}} \frac{(-1)^{m-k} k^m}{m!} h \left( \sum_{i \in H} \frac{1}{k} a_i \right)$$

μπορεί να γραφεί ως

$$E = \sum_{\eta \in C} \frac{(-1)^{m-H} H^m}{m!} h \left( \frac{\eta(1)}{H} a_1 + \dots + \frac{\eta(m)}{H} a_m \right),$$

όπου  $H = \eta(1) + \dots + \eta(m)$ . Καθώς η  $f$  είναι πολυομοπαράλληλη, έχουμε:

$$h \left( \frac{\eta(1)}{H} a_1 + \dots + \frac{\eta(m)}{H} a_m \right) = \sum_{(i_1, \dots, i_m) \in \Sigma_m^m} \frac{\eta(i_1) \cdots \eta(i_m)}{H^m} f(a_{i_1}, \dots, a_{i_m}).$$

Έτσι, παίρνουμε:

$$E = \sum_{(i_1, \dots, i_m) \in \Sigma_m^m} \left( \sum_{\eta \in C} \frac{(-1)^{m-H}}{m!} \eta(i_1) \cdots \eta(i_m) \right) f(a_{i_1}, \dots, a_{i_m}).$$

Στη συνέχεια διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:

(α)  $\{i_1, \dots, i_m\} \neq \Sigma_m$ . Τότε υπάρχει  $j \in \Sigma_m \setminus \{i_1, \dots, i_m\}$ . Θεωρούμε το σύνολο

$$J = \{\eta \in C / \eta(j) = 0\}$$

και για κάθε  $\eta \in J$  ορίζουμε την απεικόνιση  $\eta^*$  θέτοντας  $\eta^*(i) = \eta(i)$ , για κάθε  $i \neq j$  και  $\eta^*(j) = 1$ . Παρατηρούμε ότι ισχύει:

$$\eta^*(1) + \dots + \eta^*(m) = \eta(1) + \dots + \eta(m) + 1$$

και  $\eta(i_l) = \eta^*(i_l)$  ( $l = 1, \dots, m$ ). Τότε, έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{\eta \in C} (-1)^H \prod_{l=1}^m \eta(i_l) &= \sum_{\eta \in J} (-1)^H \prod_{l=1}^m \eta(i_l) + \sum_{\eta \in J} (-1)^{H+1} \prod_{l=1}^m \eta^*(i_l) \\ &= ((-1)^H + (-1)^{H+1}) \sum_{\eta \in J} \prod_{l=1}^m \eta(i_l) \\ &= 0. \end{aligned}$$

(β)  $\{i_1, \dots, i_m\} = \Sigma_m$ . Τότε, έχουμε  $\eta(i_1) \cdots \eta(i_m) \neq 0$  αν και μόνον αν  $\eta(i_l) = 1$  για κάθε  $l = 1, \dots, m$ . Έτσι, έχουμε:

$$\sum_{\eta \in C} (-1)^H \eta(i_1) \cdots \eta(i_m) = (-1)^m.$$

Άρα, στην παράσταση  $E$  έχουμε μόνο τις  $m$ -άδες  $(i_1, \dots, i_m)$  οι οποίες δίνουν όλες τις μεταθέσεις του  $\Sigma_m$ . Το πλήθος τους είναι  $m!$ . Από την άλλη πλευρά, η απεικόνιση  $F$  είναι συμμετρική και επομένως έχουμε:

$$f(a_1, \dots, a_m) = f(a_{i_1}, \dots, a_{i_m})$$

για κάθε  $(i_1, \dots, i_m) \in \Sigma_m$ . Επομένως, παίρνουμε:

$$E = \sum_{(i_1, \dots, i_m)} \frac{1}{m!} f(a_1, \dots, a_m) = f(a_1, \dots, a_m),$$

όπου  $(i_1, \dots, i_m)$  διατρέχει το σύνολο των μεταθέσεων του  $\Sigma_m$ . □

**Παράδειγμα 5.17.** Αν  $h : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  είναι ομοπαράλληλική πολυωνυμική απεικόνιση πολικού βαθμού 2, τότε η πολική της μορφή δίνεται από τον τύπο:

$$f(a_1, a_2) = 2h\left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2\right) - \frac{1}{2}h(a_1) - \frac{1}{2}h(a_2).$$

### 5.3 Γραμμικοποίηση

Ας είναι  $\mathcal{E}$  ένας ομοπαράλληλικός χώρος,  $\mathcal{F}$  ένας διανυσματικός χώρος και  $f : \mathcal{E}^m \rightarrow \mathcal{F}$  μία  $m$ -ομοπαράλληλική απεικόνιση. Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.1, για κάθε  $a_1, \dots, a_m \in \mathcal{E}$  και  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \in \vec{\mathcal{E}}$  ισχύει

$$f(a_1 + \vec{v}_1, \dots, a_m + \vec{v}_m) = f(a_1, \dots, a_m) + \sum_{\substack{S \subseteq \{1, \dots, m\}, k=|S| \\ S=\{i_1, \dots, i_k\}, k \geq 1}} f_S(\vec{v}_{i_1}, \dots, \vec{v}_{i_k}),$$

όπου  $f_S$  είναι πολυγραμμικές απεικονίσεις.

Θεωρούμε την απεικόνιση  $j^{(m)} : \mathcal{E}^m \rightarrow \hat{\mathcal{E}}^m$  με

$$j^{(m)}(x_1, \dots, x_m) = (j(x_1), \dots, j(x_m)),$$

για κάθε  $x_1, \dots, x_m \in \mathcal{E}$ . Προφανώς, έχουμε  $j^{(1)} = j$ .

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε μία γενίκευση της Πρότασης 4.4.

**Πρόταση 5.4.** Υπάρχει μία μοναδική  $m$ -γραμμική απεικόνιση  $\hat{f} : \hat{\mathcal{E}}^m \rightarrow \vec{\mathcal{F}}$  τέτοια, ώστε να ισχύει  $f = \hat{f} \circ j^{(m)}$  και για κάθε  $a_1, \dots, a_m \in \mathcal{E}$ ,  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \in \vec{\mathcal{E}}$  και  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  να έχουμε

$$\hat{f}(i(\vec{v}_1) \hat{+} \lambda_1 j(a_1), \dots, i(\vec{v}_m) \hat{+} \lambda_m j(a_m)) = \lambda_1 \cdots \lambda_m f(a_1, \dots, a_m) + \sum_{\substack{S \subseteq \{1, \dots, m\}, k=|S| \\ S=\{i_1, \dots, i_k\}, k \geq 1}} \left( \prod_{\substack{j \in \{1, \dots, m\} \\ j \notin S}} \lambda_j \right) f_S(\vec{v}_{i_1}, \dots, \vec{v}_{i_k}).$$

Επιπλέον, αν  $\lambda_i \neq 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ), τότε έχουμε:

$$\hat{f}(i(\vec{v}_1) \hat{+} \lambda_1 j(a_1), \dots, i(\vec{v}_m) \hat{+} \lambda_m j(a_m)) = \lambda_1 \cdots \lambda_m f(a_1 + \lambda_1^{-1} \vec{v}_1, \dots, a_m + \lambda_m^{-1} \vec{v}_m).$$

*Απόδειξη.* Πρώτα θα υποθέσουμε ότι υπάρχει μία  $m$ -γραμμική απεικόνιση  $\hat{f} : \hat{\mathcal{E}}^m \rightarrow \vec{\mathcal{F}}$  τέτοια, ώστε να ισχύει  $f = \hat{f} \circ j^{(m)}$  και θα δείξουμε ότι η  $\hat{f}$  είναι μοναδική. Αρχίζοντας θα δείξουμε ότι για κάθε  $S = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, m\}$ ,  $a_1, \dots, a_m \in \mathcal{E}$  και  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \in \vec{\mathcal{E}}$  ισχύει:

$$\hat{f}(j(a_1), \dots, i(\vec{v}_{i_1}), \dots, i(\vec{v}_{i_k}), \dots, j(a_m)) = f_S(\vec{v}_{i_1}, \dots, \vec{v}_{i_k}).$$



Ας είναι  $k = 1$ . Ας υποθέσουμε πιο απλά ότι  $i_1 = 1$ . Η  $\hat{f}$  είναι  $m$ -γραμμική απεικόνιση και επομένως για κάθε  $\vec{v}_1 \in \mathcal{E}$  και  $a_1, \dots, a_m \in \mathcal{E}$  ισχύει:

$$\begin{aligned} \hat{f}(j(a_1 + \vec{v}_1), j(a_2), \dots, j(a_m)) &= \\ \hat{f}(j(a_1), j(a_2), \dots, j(a_m)) &+ \hat{f}(i(\vec{v}_1), j(a_2), \dots, j(a_m)). \end{aligned}$$

Επίσης, έχουμε  $f = \hat{f} \circ j^{(m)}$ . Συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις, παίρνουμε:

$$f(a_1 + \vec{v}_1, a_2, \dots, a_m) = f(a_1, \dots, a_m) + \hat{f}(i(\vec{v}_1), j(a_2), \dots, j(a_m)).$$

Από την άλλη πλευρά, έχουμε:

$$f(a_1 + \vec{v}_1, a_2, \dots, a_m) = f(a_1, \dots, a_m) + f_{\{1\}}(\vec{v}_1).$$

Από τις δύο προηγούμενες ισότητες, προκύπτει:

$$\hat{f}(i(\vec{v}_1), j(a_2), \dots, j(a_m)) = f_{\{1\}}(\vec{v}_1).$$

Συνεπώς, η προς απόδειξη σχέση ισχύει για  $k = 1$ .

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η προς απόδειξη ισότητα ισχύει για κάθε  $l < k + 1$  και ότι  $S = \{i_1, \dots, i_{k+1}\}$ . Καθώς η απεικόνιση  $\hat{f}$  είναι πολυγραμμική, έχουμε:

$$\begin{aligned} \hat{f}(j(a_1), \dots, j(a_{i_1} + \vec{v}_{i_1}), \dots, j(a_{i_{k+1}} + \vec{v}_{i_{k+1}}), \dots, j(a_m)) &= \\ \hat{f}(j(a_1), \dots, j(a_{i_1}), \dots, j(a_{i_{k+1}}), \dots, j(a_m)) &+ \\ \hat{f}(j(a_1), \dots, i(\vec{v}_{i_1}), \dots, i(\vec{v}_{i_{k+1}}), \dots, j(a_m)) &+ \\ \sum_{\substack{j_1, \dots, j_l \in S \\ 1 \leq l \leq k}} \hat{f}(j(a_1), \dots, i(v_{j_1}), \dots, i(v_{j_l}), \dots, j(a_m)). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την υπόθεση επαγωγής και τη σχέση  $f = \hat{f} \circ j^{(m)}$ , παίρνουμε:

$$\begin{aligned} f(a_1, \dots, a_{i_1} + \vec{v}_{i_1}, \dots, a_{i_{k+1}} + \vec{v}_{i_{k+1}}, \dots, a_m) &= \\ f(a_1, \dots, a_{i_1}, \dots, a_{i_{k+1}}, \dots, a_m) &+ \hat{f}(j(a_1), \dots, i(\vec{v}_{i_1}), \dots, i(\vec{v}_{i_{k+1}}), \dots, j(a_m)) \\ &+ \sum_{\substack{T=\{j_1, \dots, j_l\} \\ T \subseteq 1 \leq l \leq k}} f_T(v_{j_1}, \dots, v_{j_l}). \end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά, έχουμε:

$$\begin{aligned} f(a_1, \dots, a_{i_1} + \vec{v}_{i_1}, \dots, a_{i_{k+1}} + \vec{v}_{i_{k+1}}, \dots, a_m) &= \\ f(a_1, \dots, a_m) &+ f_S(\vec{v}_{i_1}, \dots, \vec{v}_{i_{k+1}}) + \sum_{\substack{T=\{j_1, \dots, j_l\} \\ T \subseteq 1 \leq l \leq k}} f_T(v_{j_1}, \dots, v_{j_l}). \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις, προκύπτει:

$$\hat{f}(j(a_1), \dots, i(\vec{v}_{i_1}), \dots, i(\vec{v}_{i_{k+1}}), \dots, j(a_m)) = f_S(\vec{v}_{i_1}, \dots, \vec{v}_{i_{k+1}}).$$

Συνεπώς, η προς απόδειξη ισότητα ισχύει.

Ας υποθέσουμε στη συνέχεια ότι  $a_1, \dots, a_k \in \mathcal{E}$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ( $k \leq m$ ) και  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \in \mathcal{E}$ . Θέτουμε  $S = \{1, \dots, k\}$ . Αν  $k < m$ , τότε έχουμε:

$$\hat{f}(i(\vec{v}_1) \hat{+} \lambda_1 j(a_1), \dots, i(\vec{v}_k) \hat{+} \lambda_k j(a_k), i(\vec{v}_{k+1}), \dots, i(v_m)) =$$

$$\prod_{s=1}^k \lambda_s \hat{f}(\lambda_1^{-1}i(\vec{v}_1) \hat{+} j(a_1), \dots, \lambda_k^{-1}i(\vec{v}_k) \hat{+} j(a_k), i(\vec{v}_{k+1}), \dots, i(v_m)) = \prod_{s=1}^k \lambda_s \sum_{\substack{j_1 < \dots < j_l \\ 1 \leq l \leq k}} \hat{f}(j(a_1), \dots, i(\lambda_{j_1}^{-1}\vec{v}_{j_1}), \dots, i(\lambda_{j_l}^{-1}\vec{v}_{j_l}), \dots, j(a_k), i(\vec{v}_{k+1}), \dots, i(\vec{v}_m)).$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας την ισότητα που αποδείξαμε παραπάνω με επαγωγή, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \hat{f}(i(\vec{v}_1) \hat{+} \lambda_{1j}(a_1), \dots, i(\vec{v}_k) \hat{+} \lambda_{kj}(a_k), i(\vec{v}_{k+1}), \dots, i(v_m)) = \\ \prod_{s=1}^k \lambda_s \sum_{\substack{T=\{j_1, \dots, j_l\} \\ T \subseteq S}} f_T(\lambda_{j_1}^{-1}\vec{v}_{j_1}, \dots, \lambda_{j_l}^{-1}\vec{v}_{j_l}, \vec{v}_{k+1}, \dots, \vec{v}_m) = \\ \sum_{\substack{T=\{j_1, \dots, j_l\} \\ T \subseteq S}} \prod_{s \in S \setminus T} \lambda_s f_T(\vec{v}_{j_1}, \dots, \vec{v}_{j_l}, \vec{v}_{k+1}, \dots, \vec{v}_m). \end{aligned}$$

Αντίστοιχα αποτελέσματα έχουμε, αν αντί του συνόλου  $\{1, \dots, k\}$  με  $k < m$ , θεωρήσουμε οποιοδήποτε υποσύνολο του  $\{1, \dots, m\}$  με  $k$  στοιχεία. Τέλος, αν  $k = m$ , τότε έχουμε την εξής ισότητα:

$$\begin{aligned} \hat{f}(i(\vec{v}_1) \hat{+} \lambda_{1j}(a_1), \dots, i(\vec{v}_m) \hat{+} \lambda_{mj}(a_m)) = \lambda_1 \cdots \lambda_m f(a_1, \dots, a_m) + \\ \sum_{\substack{S \subseteq \{1, \dots, m\}, k=|S| \\ S=\{i_1, \dots, i_k\}, k \geq 1}} \left( \prod_{\substack{j \in \{1, \dots, m\} \\ j \notin S}} \lambda_j \right) f_S(\vec{v}_{i_1}, \dots, \vec{v}_{i_k}). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι αν στην ισότητα αυτή θεωρήσουμε ότι κάποια  $\lambda_i$  ισούνται με 0, τότε προκύπτει ισότητα της προηγούμενης μορφής χωρίς τον όρο  $f(a_1, \dots, a_m)$ . Συνεπώς, ο τύπος αυτός περιλαμβάνει και τις δύο περιπτώσεις που εξετάσαμε και έτσι συμπεραίνουμε τη μοναδικότητα της απεικόνισης  $\hat{f}$ .

Επιπλέον, αν  $\lambda_i \neq 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ), τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \hat{f}(i(\vec{v}_1) \hat{+} \lambda_{1j}(a_1), \dots, i(\vec{v}_m) \hat{+} \lambda_{mj}(a_m)) = \\ \lambda_1 \cdots \lambda_m \hat{f}(j(a_1 + \lambda_1^{-1}\vec{v}_1), \dots, j(a_m + \lambda_m^{-1}\vec{v}_m)). \end{aligned}$$

Καθώς  $f = \hat{f} \circ j^{(m)}$ , παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \hat{f}(i(\vec{v}_1) \hat{+} \lambda_{1j}(a_1), \dots, i(\vec{v}_m) \hat{+} \lambda_{mj}(a_m)) = \\ \lambda_1 \cdots \lambda_m f(a_1 + \lambda_1^{-1}\vec{v}_1, \dots, a_m + \lambda_m^{-1}\vec{v}_m). \end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η έκφραση που δώσαμε παραπάνω ορίζει μία  $m$ -γραμμική απεικόνιση  $\hat{f} : \hat{\mathcal{E}}^m \rightarrow \mathcal{F}$ . Θεωρούμε τα στοιχεία του  $\hat{\mathcal{E}}$ ,  $B = i(\vec{z}) \hat{+} \kappa j(b)$ ,  $C = i(\vec{w}) \hat{+} \mu j(c)$  και  $A_i = i(\vec{v}_i) \hat{+} \lambda_i j(a_i)$  ( $i = 2, \dots, m$ ). Ας υποθέσουμε πρώτα ότι  $\kappa + \mu \neq 0$ . Έχουμε:

$$\begin{aligned} \hat{f}(B \hat{+} C, A_2, \dots, A_m) &= \hat{f}(i(\vec{z} + \vec{w}) \hat{+} (\kappa + \mu)j(\frac{\kappa}{\kappa + \mu}b + \frac{\mu}{\kappa + \mu}c), A_2, \dots, A_m) \\ &= (\kappa + \mu)\lambda_2 \cdots \lambda_m f(\frac{\kappa}{\kappa + \mu}b + \frac{\mu}{\kappa + \mu}c, a_2, \dots, a_m) + \\ &\quad \sum_{\substack{S \subseteq \{1, \dots, m\}, \\ S=\{1, i_2, \dots, i_k\}}} \left( \prod_{\substack{j \in \{1, \dots, m\} \\ j \notin S}} \lambda_j \right) f_S(\vec{z} + \vec{w}, \vec{v}_{i_2}, \dots, \vec{v}_{i_k}) + \end{aligned}$$

$$\sum_{\substack{S \subseteq \{1, \dots, m\}, \\ S = \{i_1, \dots, i_k\}, 1 \notin S}} \left( (\kappa + \mu) \prod_{\substack{j \in \{1, \dots, m\} \\ j \notin S}} \lambda_j \right) f_S(\vec{v}_{i_1}, \dots, \vec{v}_{i_k}).$$

Καθώς η  $f$  είναι πολυμοπαράλληλική απεικόνιση, παίρνουμε:

$$f\left(\frac{\kappa}{\kappa + \mu}b + \frac{\mu}{\kappa + \mu}c, a_2, \dots, a_m\right) = \frac{\kappa}{\kappa + \mu}f(b, a_2, \dots, a_m) + \frac{\mu}{\kappa + \mu}f(c, a_2, \dots, a_m).$$

Επίσης, η  $f_S$  είναι πολυγραμμική απεικόνιση και έτσι έχουμε:

$$f_S(\vec{z} + \vec{w}, \vec{v}_{i_2}, \dots, \vec{v}_{i_k}) = f_S(\vec{z}, \vec{v}_{i_2}, \dots, \vec{v}_{i_k}) + f_S(\vec{w}, \vec{v}_{i_2}, \dots, \vec{v}_{i_k}).$$

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω, παίρνουμε:

$$\hat{f}(B \hat{+} C, A_2, \dots, A_m) = \hat{f}(B, A_2, \dots, A_m) + \hat{f}(C, A_2, \dots, A_m).$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι  $\kappa + \mu = 0$ . Έχουμε:

$$\hat{f}(B \hat{+} C, A_2, \dots, A_m) = \hat{f}(i(\vec{z} + \vec{w} + \kappa \vec{c}b), A_2, \dots, A_m) =$$

$$\sum_{\substack{S \subseteq \{1, \dots, m\}, \\ S = \{1, i_2, \dots, i_k\}}} \left( \prod_{\substack{j \in \{1, \dots, m\} \\ j \notin S}} \lambda_j \right) f_S(\vec{z} + \vec{w} + \kappa \vec{c}b, \vec{v}_{i_2}, \dots, \vec{v}_{i_k}).$$

Από την άλλη πλευρά, ισχύει:

$$C = i(\vec{w}) \hat{+} (-\kappa)j(c) = i(\vec{w}) \hat{+} (-\kappa)j(b + \vec{c}b) = i(\vec{w} + \kappa \vec{c}b) \hat{+} (-\kappa)j(b).$$

Οπότε, έχουμε:

$$\hat{f}(B, A_2, \dots, A_m) + \hat{f}(C, A_2, \dots, A_m) = \kappa \lambda_2 \cdots \lambda_m f(b, a_2, \dots, a_m) +$$

$$\sum_{\substack{S \subseteq \{1, \dots, m\}, \\ S = \{1, i_2, \dots, i_k\}}} \left( \prod_{\substack{j \in \{1, \dots, m\} \\ j \notin S}} \lambda_j \right) f_S(\vec{z}, \vec{v}_{i_2}, \dots, \vec{v}_{i_k}) +$$

$$\sum_{\substack{1 \notin S \subseteq \{1, \dots, m\} \\ S = \{i_1, \dots, i_k\}}} \left( \prod_{\substack{j \in \{1, \dots, m\} \\ j \notin S}} \kappa \lambda_j \right) f_S(\vec{v}_{i_1}, \dots, \vec{v}_{i_k}) - \kappa \lambda_2 \cdots \lambda_m f(b, a_2, \dots, a_m)$$

$$+ \sum_{\substack{S \subseteq \{1, \dots, m\}, \\ S = \{1, i_2, \dots, i_k\}}} \left( \prod_{\substack{j \in \{1, \dots, m\} \\ j \notin S}} \lambda_j \right) f_S(\vec{w} + \kappa \vec{c}b, \vec{v}_{i_2}, \dots, \vec{v}_{i_k}) +$$

$$\sum_{\substack{1 \notin S \subseteq \{1, \dots, m\} \\ S = \{i_1, \dots, i_k\}}} \left( \prod_{\substack{j \in \{1, \dots, m\} \\ j \notin S}} (-\kappa) \lambda_j \right) f_S(\vec{v}_{i_1}, \dots, \vec{v}_{i_k}) =$$

$$\sum_{\substack{S \subseteq \{1, \dots, m\}, \\ S = \{i_1, \dots, i_k\}}} \left( \prod_{\substack{j \in \{1, \dots, m\} \\ j \notin S}} \lambda_j \right) f_S(\vec{z} + \vec{w} + \kappa \vec{cb}, \vec{v}_{i_2}, \dots, \vec{v}_{i_k}).$$

Έτσι, και σε αυτή την περίπτωση, παίρνουμε:

$$\hat{f}(B \hat{+} C, A_2, \dots, A_m) = \hat{f}(B, A_2, \dots, A_m) + \hat{f}(C, A_2, \dots, A_m).$$

Τέλος, εύκολα προκύπτει ότι για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ισχύει:

$$\hat{f}(\lambda B, A_2, \dots, A_m) = \lambda \hat{f}(B, A_2, \dots, A_m).$$

Έτσι, αποδείξαμε τη γραμμικότητα της  $\hat{f}$  ως προς την πρώτη συντεταγμένη. Ομοίως, αποδεικνύεται η γραμμικότητα της  $\hat{f}$  και ως προς τις άλλες συντεταγμένες.  $\square$

Ας είναι  $\mathcal{E}$  και  $\mathcal{F}$  ομοπαράλληλοι χώροι και  $f : \mathcal{E}^m \rightarrow \mathcal{F}$  μία  $m$ -ομοπαράλληλη απεικόνιση. Τότε, για κάθε  $a_1, \dots, a_m \in \mathcal{E}$  και  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \in \vec{\mathcal{E}}$  ισχύει:

$$f(a_1 + \vec{v}_1, \dots, a_m + \vec{v}_m) = f(a_1, \dots, a_m) + \sum_{\substack{S \subseteq \{1, \dots, m\}, k=|S| \\ S = \{i_1, \dots, i_k\}, k \geq 1}} f_S(\vec{v}_{i_1}, \dots, \vec{v}_{i_k}),$$

όπου  $f_S$  πολυγραμμικές απεικονίσεις.

Το παρακάτω πόρισμα είναι γενίκευση του Πορίσματος 4.3.

**Πόρισμα 5.2.** Υπάρχει μία μοναδική  $m$ -γραμμική απεικόνιση  $\hat{f} : \hat{\mathcal{E}}^m \rightarrow \hat{\mathcal{F}}$  τέτοια, ώστε να ισχύει  $J \circ f = \hat{f} \circ J^{(m)}$  και για κάθε  $a_1, \dots, a_m \in \mathcal{E}$ ,  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \in \vec{\mathcal{E}}$  και  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  έχουμε

$$\hat{f}(i(\vec{v}_1) \hat{+} \lambda_1 J(a_1), \dots, i(\vec{v}_m) \hat{+} \lambda_m J(a_m)) = \lambda_1 \cdots \lambda_m J(f(a_1, \dots, a_m)) \hat{+}$$

$$\sum_{\substack{S \subseteq \{1, \dots, m\}, k=|S| \\ S = \{i_1, \dots, i_k\}, k \geq 1}} \left( \prod_{\substack{j \in \{1, \dots, m\} \\ j \notin S}} \lambda_j \right) i(f_S(\vec{v}_{i_1}, \dots, \vec{v}_{i_k})).$$

Επιπλέον, αν  $\lambda_i \neq 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ), τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \hat{f}(i(\vec{v}_1) \hat{+} \lambda_1 J(a_1), \dots, i(\vec{v}_m) \hat{+} \lambda_m J(a_m)) = \\ \lambda_1 \cdots \lambda_m J_{\mathcal{F}}(f(a_1 + \lambda_1^{-1} \vec{v}_1, \dots, a_m + \lambda_m^{-1} \vec{v}_m)). \end{aligned}$$

**Ορισμός 5.7.** Ας είναι  $\mathcal{E}$  και  $\mathcal{F}$  ομοπαράλληλοι χώροι και  $f : \mathcal{E}^m \rightarrow \mathcal{F}$  μία  $m$ -ομοπαράλληλη απεικόνιση. Η  $m$ -γραμμική απεικόνιση  $\hat{f} : \hat{\mathcal{E}}^m \rightarrow \hat{\mathcal{F}}$  καλείται *γραμμικοποίηση ή ομογενοποίηση της  $f$* .

**Παράδειγμα 5.18.** Ας είναι  $f : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  μία 2-ομοπαράλληλη απεικόνιση. Σύμφωνα με το Παράδειγμα 5.9, υπάρχουν  $a, b, c, d \in \mathbb{A}$  έτσι, ώστε για κάθε  $(x_1, x_2) \in \mathbb{A} \times \mathbb{A}$  να έχουμε:

$$f_{\{1,2\}}(x_1, x_2) = ax_1x_2, \quad f_{\{1\}}(x_1) = bx_1, \quad f_{\{2\}}(x_2) = cx_2.$$

Επιπλέον,  $d = f(0, 0)$  και επομένως ισχύει:

$$f(x_1, x_2) = ax_1x_2 + bx_1 + cx_2 + d.$$

Έτσι, από το Πόρισμα 5.2, για κάθε  $x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  παίρνουμε:

$$\hat{f}(i(x_1) \hat{+} \lambda_1 J(0), i(x_2) \hat{+} \lambda_2 J(0)) = \lambda_1 \lambda_2 J(d) \hat{+} i(\lambda_2 bx_1 + \lambda_1 cx_2 + ax_1x_2).$$

Οπότε, προκύπτει:

$$\hat{f}(i(x_1) \hat{+} \lambda_{1j}(0), i(x_2) \hat{+} \lambda_{2j}(0)) = \langle d + \lambda_1^{-1} b x_1 + \lambda_2^{-1} c x_2 + a(\lambda_1 \lambda_2)^{-1} x_1 x_2, \lambda_1 \lambda_2 \rangle.$$

Το ζεύγος  $(0, 1)$  είναι ένα ομοπαράλληλικό πλαίσιο του  $\mathbb{A}$  και επομένως το ζεύγος  $(i(\vec{01}), j(0))$  είναι μία βάση του  $\hat{\mathbb{A}}$ . Οι συντεταγμένες του στοιχείου  $\hat{f}(i(x_1) \hat{+} \lambda_{1j}(0), i(x_2) \hat{+} \lambda_{2j}(0))$  ως προς αυτή τη βάση δίνονται από το ζεύγος

$$(\lambda_1 \lambda_2 d + c x_2 \lambda_1 + b x_1 \lambda_2 + a x_1 x_2, \lambda_1 \lambda_2).$$

## 5.4 Ασκήσεις-Εργασίες

### Ασκήσεις

**5.4.1** Ας είναι  $E$  πραγματικός διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και  $\Phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  μία συμμετρική διγραμμική απεικόνιση. Για κάθε βάση  $V = (v_1, \dots, v_n)$  του  $E$  θεωρούμε τον πίνακα  $M_V = (\Phi(v_i, v_j))$ . Αν  $W$  είναι μία άλλη βάση του  $E$ , τότε ναδειχθεί ότι υπάρχει ένας αντιστρέψιμος  $n \times n$  πίνακας  $P$  με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς έτσι, ώστε να ισχύει

$$M_W = {}^t P M_V P$$

(όπου  ${}^t P$  είναι ο ανάστροφος πίνακας του  $P$ ).

**5.4.2** Για κάθε φυσικό αριθμό  $k$  θεωρούμε την απεικόνιση

$$\varphi_k : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}, P(x) \mapsto \int_0^1 P(t)^k dt.$$

Ναδειχθεί ότι η απεικόνιση  $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία ορίζεται από τη σχέση

$$\varphi(P) = \sum_{k=0}^m \varphi_k(P), \quad \text{για κάθε } P \in \mathbb{R}_2[x],$$

είναι μία πολωνυμική απεικόνιση πολικού βαθμού  $m$ .

**5.4.3** Ας είναι  $r, s \in \mathbb{A}$  με  $r \neq s$  και  $a, b, c \in \mathbb{A}^3$ . Ναδειχθεί ότι υπάρχει μία μοναδική συμμετρική 2-ομοπαράλληλική απεικόνιση  $f : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^3$  με  $f(r, r) = a$ ,  $f(r, s) = b$  και  $f(s, s) = c$ .

**5.4.4** Ας είναι  $F_i(x) \in \mathbb{R}[x]$  ( $i = 1, 2, 3$ ) με  $\max\{\deg F_1, \deg F_2, \deg F_3\} = 2$ . Θεωρούμε την απεικόνιση

$$F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^3, x \mapsto (F_1(x), F_2(x), F_3(x)).$$

Ναδειχθεί ότι υπάρχει μία συμμετρική 2-ομοπαράλληλική απεικόνιση  $f : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^3$  τέτοια, ώστε  $F(x) = f(x, x)$  και να εκφραστεί συναρτήσει των συντελεστών των πολωνύμων  $F_i(x)$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

**5.4.5** Ας είναι  $P$  η παραβολή η οποία ορίζεται από την εξίσωση  $a^2 y - b x^2 = 0$ , όπου  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

α) Ναδειχθεί ότι υπάρχουν πολυώνυμα  $x(t), y(t) \in \mathbb{R}[t]$  τέτοια, ώστε η απεικόνιση

$$F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^2 : t \mapsto (x(t), y(t))$$

να έχει ως πεδίο τιμών το σύνολο των σημείων της  $P$  και να είναι ομοπαράλληλική πολωνυμική απεικόνιση πολικού βαθμού 2.

β) Αν  $f$  είναι η 2-πολική μορφή της  $F$ , τότε ναδειχθεί ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής  $P$  στα σημεία  $F(t_1)$  και  $F(t_2)$ , με  $t_1 \neq t_2$ , τέμνονται στο σημείο  $f(t_1, t_2)$ .

- 5.4.6 Να προσδιοριστούν οι 3-ομοπαράλληλικές, συμμετρικές απεικονίσεις  $f : \mathbb{A}^3 \rightarrow \mathbb{A}^2$  και οι 2-ομοπαράλληλικές, συμμετρικές απεικονίσεις  $f : (\mathbb{A}^3)^2 \rightarrow \mathbb{A}$ .
- 5.4.7 Ας είναι  $(\mathcal{P}, \mathbb{R}^2, +)$  ο ομοπαράλληλικός χώρος του Παραδείγματος 1.5. Να περιγραφούν οι 3-ομοπαράλληλικές, συμμετρικές απεικονίσεις  $f : \mathcal{P}^3 \rightarrow \mathbb{A}^3$ .
- 5.4.8 Ας είναι  $f : \mathbb{A}^m \rightarrow \mathbb{A}^n$  μία  $m$ -ομοπαράλληλική απεικόνιση. Να περιγραφεί η γραμμικοποίησή της,  $\hat{f} : \widehat{\mathbb{A}}^m \rightarrow \widehat{\mathbb{A}}^n$ .

## Βιβλιογραφία

- [1] M. Berger. *Geometry 1*. Universitext. Springer Verlag, 2004.
- [2] H. Cartan. *Cours de Calcul Différentiel (Collection Méthodes)*. Paris: Hermann, 1990.
- [3] J. Gallier. *Curves and Surfaces in Geometric Modelling: Theory and Algorithms*. San Francisco: The Morgan-Kaufmann Series in Computer Graphics. Morgan-Kaufman Publishers, 1999.
- [4] L. Ramshaw. *Blossoming: A connect the dots approach to splines*. Palo Alto, California: Digital Systems Research Center: SRC reports, 1987.
- [5] L. Ramshaw. “Blossoms are polar forms”. Στο: *Computer Aided Geometric Design* 6.4 (1989), σσ. 323–358.
- [6] H.P. Seidel. “An introduction to polar forms”. Στο: *IEEE Computer Graphics and Applications* 13.1 (1993), σσ. 38–46.
- [7] H. Weyl. *The Classical Groups. Their Invariants and representations*. Princeton Mathematical Series, No. 1. Princeton University Press, 1946.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

# ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ

### Σύνοψη

Σ' αυτό το κεφάλαιο εισάγουμε τις πολυωνυμικές καμπύλες και μελετάμε τη μορφή Bézier τους. Η μορφή αυτή παρέχει έναν απλό και αποτελεσματικό τρόπο παράστασης πολυωνυμικών καμπυλών και αποτελεί θεμελιώδες εργαλείο σχεδίασης στα Γραφικά Υπολογιστών. Για περισσότερες πληροφορίες ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να συμβουλευτεί τα συγγράμματα τα οποία παρατίθενται στο τέλος του κεφαλαίου.

### 6.1 Καμπύλες και Σημεία Ελέγχου

Πρώτα θα δώσουμε τον ορισμό της πολυωνυμικής καμπύλης.

**Ορισμός 6.1.** Μία (παραμετροποιημένη) πολυωνυμική καμπύλη πολικού βαθμού  $m$  είναι μία ομοπαραλληλική πολυωνυμική απεικόνιση  $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{E}$  πολικού βαθμού  $m$ , όπου  $\mathcal{E}$  είναι ομοπαραλληλικός χώρος διάστασης  $\geq 2$ . Το σύνολο  $F(\mathbb{A})$  καλείται ίχνος της  $F$ . Αν  $r, s \in \mathbb{A}$  με  $r < s$ , τότε το σύνολο  $F([r, s])$  καλείται τμήμα της  $F$ .

**Παράδειγμα 6.1.** Η απεικόνιση  $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^3$  με

$$F(t) = (t + 2t^2, 1 - t^2, 3 + 2t), \quad \forall t \in \mathbb{A},$$

είναι μία πολυωνυμική καμπύλη πολικού βαθμού 2. Πράγματι, ας θεωρήσουμε την απεικόνιση  $f : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^3$  με

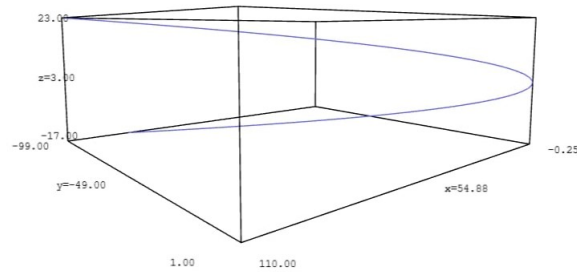
$$f(t_1, t_2) = \left( \frac{1}{2}(t_1 + t_2) + 2t_1t_2, 1 - t_1t_2, 3 + t_1 + t_2 \right), \quad \forall (t_1, t_2) \in \mathbb{A}^2.$$

Παρατηρούμε αμέσως ότι η απεικόνιση  $f(t_1, t_2)$  είναι συμμετρική και για κάθε  $t \in \mathbb{A}$  ισχύει

$$f(t, t) = (t + 2t^2, 1 - t^2, 3 + 2t) = F(t).$$

Επιπλέον, οι αντιστοιχίες  $t_1 \mapsto f(t_1, t_2)$  και  $t_2 \mapsto f(t_1, t_2)$  ορίζουν ομοπαραλληλικές απεικονίσεις από τον χώρο  $\mathbb{A}$  στο  $\mathbb{A}^3$ . Συνεπώς, η  $F$  είναι μία πολυωνυμική καμπύλη πολικού βαθμού 2.





Σχήμα 6.1: Τμήμα της καμπύλης του Παραδείγματος 6.1.

**Παράδειγμα 6.2.** Από το Παράδειγμα 5.16 έπεται ότι οι πολυωνυμικές καμπύλες πολικού βαθμού 3 μέσα στο  $\mathbb{A}^2$  δίνονται από τις απεικονίσεις  $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^2$  με

$$F(x) = b + x\vec{u}_1 + x^2\vec{u}_2 + x^3\vec{u}_3,$$

για κάθε  $x \in \mathbb{A}$ , όπου  $b \in \mathbb{A}^2$  και  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \in \mathbb{R}^2$ . Έτσι, αν  $b = (b_1, b_2)$  και

$$\vec{u}_j = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, 3),$$

τότε, για κάθε  $x \in \mathbb{A}$ , έχουμε:

$$F(x) = (b_1 + u_{1,1}x + u_{1,2}x^2 + u_{1,3}x^3, b_2 + u_{2,1}x + u_{2,2}x^2 + u_{2,3}x^3).$$

Ας είναι  $\mathcal{E}$  ομοπαράλληλος χώρος και  $f : \mathbb{A}^m \rightarrow \mathcal{E}$  μία συμμετρική  $m$ -ομοπαράλληλική απεικόνιση. Θεωρούμε ένα ομοπαράλληλο πλαίσιο  $(r, s)$  του  $\mathbb{A}$  και το σύνολο  $\Sigma_m = \{1, \dots, m\}$ . Αν  $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{A}$ , τότε υπάρχουν  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  τέτοια, ώστε

$$t_i = (1 - \lambda_i)r + \lambda_i s, \quad (i = 1, \dots, m).$$

Έτσι, παίρνουμε:

$$f(t_1, \dots, t_m) = \sum_{k=0}^m \sum_{\substack{I \cup J = \Sigma_m \\ I \cap J = \emptyset, |I|=k}} \prod_{i \in I} (1 - \lambda_i) \prod_{j \in J} \lambda_j f(\underbrace{r, \dots, r}_{m-k}, \underbrace{s, \dots, s}_k).$$

Καθώς ισχύει

$$\lambda_i = \frac{t_i - r}{s - r} \quad (i = 1, \dots, m),$$

προκύπτει:

$$f(t_1, \dots, t_m) = \sum_{k=0}^m \sum_{\substack{I \cup J = \Sigma_m \\ I \cap J = \emptyset, |I|=k}} \prod_{i \in I} \frac{s - t_i}{s - r} \prod_{j \in J} \frac{t_j - r}{s - r} f(\underbrace{r, \dots, r}_{m-k}, \underbrace{s, \dots, s}_k).$$

Συνεπώς, κάθε συμμετρική  $m$ -ομοπαράλληλική απεικόνιση  $f : \mathbb{A}^m \rightarrow \mathcal{E}$  είναι πλήρως ορισμένη από τα  $m+1$  σημεία

$$f(\underbrace{r, \dots, r}_{m-k}, \underbrace{s, \dots, s}_k) \quad (k = 0, \dots, m).$$

Ο συντελεστής του  $f(\underbrace{r, \dots, r}_{m-k}, \underbrace{s, \dots, s}_k)$ ,

$$p_k(t_1, \dots, t_m) = \sum_{\substack{I \cup J = \Sigma_m \\ I \cap J = \emptyset, |I|=k}} \prod_{i \in I} \frac{s - t_i}{s - r} \prod_{j \in J} \frac{t_j - r}{s - r},$$

ορίζει μία συμμετρική  $m$ -ομοπαράλληλική απεικόνιση  $p_k : \mathbb{A}^m \rightarrow \mathbb{A}$ . Πράγματι, για κάθε  $i = 1, \dots, m$  η απεικόνιση  $p_k(t_1, \dots, t_m)$  γράφεται:

$$p_k(t_1, \dots, t_m) = A_{k,i} t_i + B_{k,i}$$

όπου  $A_{k,i}$  και  $B_{k,i}$  είναι συναρτήσεις των  $t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_m$  και  $r, s$ . Η αντιστοιχία  $t_i \mapsto A_{k,i} t_i + B_{k,i}$  ορίζει μία ομοπαράλληλική απεικόνιση από το  $\mathbb{A}$  στο  $\mathbb{A}$  και επομένως η απεικόνιση  $p_k$  είναι  $m$ -ομοπαράλληλική. Επίσης, παρατηρούμε ότι η απεικόνιση  $p_k$  είναι συμμετρική. Επιπλέον, ισχύει:

$$\sum_{k=0}^m p_k(t_1, \dots, t_m) = \prod_{i=1}^m \left( \frac{s-t_i}{s-r} + \frac{t_i-r}{s-r} \right) = 1.$$

Ας είναι τώρα  $b_0, \dots, b_m \in \mathcal{E}$  και  $r, s \in \mathbb{A}$  με  $r < s$ . Η παραπάνω ισότητα συνεπάγεται ότι για κάθε  $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{A}$  το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^m p_k(t_1, \dots, t_m) b_k$$

είναι ένας βαρυκεντρικός συνδυασμός των  $b_0, \dots, b_m$  και επομένως ορίζει ένα σημείο του  $\mathcal{E}$ . Επομένως, η αντιστοιχία

$$(t_1, \dots, t_m) \mapsto \sum_{k=0}^m p_k(t_1, \dots, t_m) b_k$$

ορίζει μία απεικόνιση  $f : \mathbb{A}^m \rightarrow \mathcal{E}$ . Είδαμε ότι οι συντελεστές  $p_k(t_1, \dots, t_m)$  ορίζουν συμμετρικές και  $m$ -ομοπαράλληλικές απεικονίσεις. Έτσι, προκύπτει αμέσως ότι η απεικόνιση  $f$  είναι συμμετρική. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η  $f$  είναι  $m$ -ομοπαράλληλική. Ας είναι λοιπόν  $a_1, \dots, a_q \in \mathbb{A}$  και  $\lambda_1, \dots, \lambda_q \in \mathbb{R}$  με  $\lambda_1 + \dots + \lambda_q = 1$ . Τότε, έχουμε:

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{j=1}^q \lambda_j a_j, t_2, \dots, t_m\right) &= \sum_{k=0}^m p_k\left(\sum_{j=1}^q \lambda_j a_j, t_2, \dots, t_m\right) b_k \\ &= \sum_{k=0}^m \left(\sum_{j=1}^q \lambda_j p_k(a_j, t_2, \dots, t_m)\right) b_k \\ &= b_0 + \sum_{k=0}^m \left(\sum_{j=1}^q \lambda_j p_k(a_j, t_2, \dots, t_m)\right) \overrightarrow{b_0 b_k} \\ &= b_0 + \sum_{j=1}^q \lambda_j \left(\sum_{k=0}^m p_k(a_j, t_2, \dots, t_m) \overrightarrow{b_0 b_k}\right) \\ &= b_0 + \sum_{j=1}^q \lambda_j \overrightarrow{b_0 f(a_j, t_2, \dots, t_m)} \\ &= \sum_{j=1}^q \lambda_j f(a_j, t_2, \dots, t_m). \end{aligned}$$

Επομένως, η αντιστοιχία  $t_1 \mapsto f(t_1, \dots, t_m)$  ορίζει μία ομοπαράλληλική απεικόνιση από το  $\mathbb{A}$  στο  $\mathcal{E}$ . Το ίδιο ισχύει και για τις υπόλοιπες μεταβλητές. Συνεπώς, η απεικόνιση  $f$  είναι  $m$ -ομοπαράλληλική.

Τέλος, ισχύει:

$$f(\underbrace{r, \dots, r}_{m-k}, \underbrace{s, \dots, s}_k) = b_k \quad (k = 0, \dots, m).$$

Συνοψίζουμε τα παραπάνω στο ακόλουθο θεώρημα:

**Θεώρημα 6.1.** Ας είναι  $\mathcal{E}$  ομοπαράλληλος χώρος διάστασης  $\geq 2$ ,  $f : \mathbb{A}^m \rightarrow \mathcal{E}$  μία συμμετρική  $m$ -ομοπαράλληλική απεικόνιση και  $(r, s)$  ένα ομοπαράλληλο πλαίσιο του  $\mathbb{A}$ . Θέτουμε  $\Sigma_m = \{1, \dots, m\}$ . Τότε, έχουμε:

$$f(t_1, \dots, t_m) = \sum_{k=0}^m \sum_{\substack{I \cup J = \Sigma_m \\ I \cap J = \emptyset, |I|=k}} \prod_{i \in I} \frac{s-t_i}{s-r} \prod_{j \in J} \frac{t_j-r}{s-r} f(\underbrace{r, \dots, r}_{m-k}, \underbrace{s, \dots, s}_k).$$

Αντιστρόφως, αν  $b_0, \dots, b_m \in \mathcal{E}$ , τότε υπάρχει μοναδική συμμετρική  $m$ -ομοπαράλληλική απεικόνιση  $f : \mathbb{A}^m \rightarrow \mathcal{E}$  τέτοια, ώστε

$$f(\underbrace{r, \dots, r}_{m-k}, \underbrace{s, \dots, s}_k) = b_k \quad (k = 0, \dots, m).$$

Η πολωνυμική καμπύλη η οποία ορίζεται από την  $f$  είναι:

$$F(t) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \left( \frac{s-t}{s-r} \right)^{m-k} \left( \frac{t-r}{s-r} \right)^k b_k.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι κάθε πολωνυμική καμπύλη πολικού βαθμού  $m$  μπορεί να πάρει αυτή τη μορφή.

**Ορισμός 6.2.** Τα σημεία  $b_0, b_1, \dots, b_m$  καλούνται σημεία ελέγχου του *Bézier* της πολωνυμικής καμπύλης  $F$  πολικού βαθμού  $m$ , ως προς το ομοπαράλληλο πλαίσιο  $(r, s)$  του  $\mathbb{A}$ .

**Παράδειγμα 6.3.** Θεωρούμε την απεικόνιση  $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^2$  η οποία ορίζεται από τον τύπο

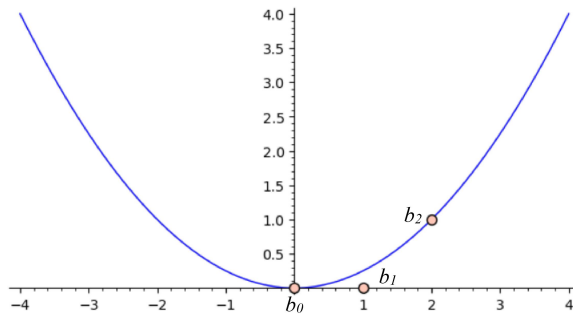
$$F(t) = (2t, t^2), \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{A}.$$

Η απεικόνιση

$$f : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2, (t_1, t_2) \mapsto (t_1 + t_2, t_1 t_2)$$

είναι συμμετρική, 2-ομοπαράλληλική και για κάθε  $t \in \mathbb{A}$  ισχύει  $f(t, t) = F(t)$ . Επομένως, η  $F$  είναι πολωνυμική καμπύλη πολικού βαθμού 2 με 2-πολική μορφή την απεικόνιση  $f$ . Τα αντίστοιχα σημεία ελέγχου της  $F$  ως προς το ομοπαράλληλο πλαίσιο  $(0, 1)$  του  $\mathbb{A}$  είναι:

$$b_0 = f(0, 0) = (0, 0), \quad b_1 = f(1, 0) = (1, 0), \quad b_2 = f(1, 1) = (2, 1).$$



Σχήμα 6.2: Τμήμα της καμπύλης του Παραδείγματος 6.3.

**Παράδειγμα 6.4.** Θεωρούμε το σύνολο

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 / y^2 = x^3 + x^2\}.$$

Ας είναι  $(x, y) \in S \setminus \{(0, 0)\}$ . Τότε, έχουμε  $x \neq 0$ . Θέτουμε  $t = y/x$  και παίρνουμε

$$x = t^2 - 1, \quad y = t(t^2 - 1).$$

Από την άλλη πλευρά, για κάθε  $t \in \mathbb{A}$ , οι αριθμοί  $x = t^2 - 1$  και  $y = t(t^2 - 1)$  ικανοποιούν τη σχέση  $y^2 = x^3 + x^2$ . Έτσι, έχουμε την απεικόνιση

$$G : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}^2, t \longmapsto (t^2 - 1, t(t^2 - 1)).$$

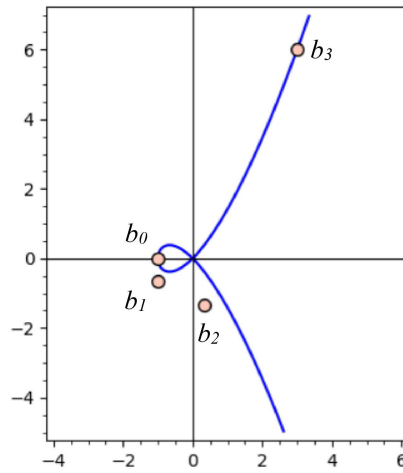
Η απεικόνιση  $f : \mathbb{A}^3 \rightarrow \mathbb{A}^2$ , με

$$f(t_1, t_2, t_3) = \left( \frac{1}{3}(t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3) - 1, t_1 t_2 t_3 - \frac{1}{3}(t_1 + t_2 + t_3) \right),$$

είναι μία συμμετρική, 3-ομοπαράλληλική απεικόνιση με  $f(t, t, t) = F(t)$ , για κάθε  $t \in \mathbb{A}$ . Άρα, είναι μία 3-πολική μορφή για την  $F$  και επομένως η  $F$  είναι μία πολυωνυμική καμπύλη πολικού βαθμού 3 της οποίας το ίχνος είναι το σύνολο  $S$ . Τα αντίστοιχα σημεία ελέγχου ως προς το ομοπαράλληλικό πλαίσιο  $(0, 2)$  είναι τα εξής:

$$b_0 = f(0, 0, 0) = (-1, 0), \quad b_1 = f(0, 0, 2) = (-1, -2/3)$$

$$b_2 = f(0, 2, 2) = (1/3, -4/3), \quad b_3 = f(2, 2, 2) = (3, 6).$$



Σχήμα 6.3: Τμήμα της καμπύλης του Παραδείγματος 6.4.

## 6.2 Πολυώνυμα του Bernstein

Σ' αυτή την ενότητα θα δούμε μερικές ιδιότητες των πολυωνύμων

$$B_k^m[r, s](t) = \binom{m}{k} \left( \frac{s-t}{s-r} \right)^{m-k} \left( \frac{t-r}{s-r} \right)^k \quad (k = 0, \dots, m)$$

τα οποία εμφανίζονται ως συντελεστές στη μορφή του *Bézier* μίας πολυωνυμικής καμπύλης.

**Ορισμός 6.3.** Τα πολυώνυμα  $B_k^m[r, s](t)$  ( $k = 0, \dots, m$ ) καλούνται *πολυώνυμα του Bernstein* βαθμού  $m$  επί του  $[r, s]$ .

Στην περίπτωση όπου  $r = 0$  και  $s = 1$  σημειώνουμε πιο απλά το πολυώνυμο  $B_k^m[0, 1](t)$  με  $B_k^m(t)$ . Έτσι, έχουμε:

$$B_k^m(t) = \binom{m}{k} (1-t)^{m-k} t^k.$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει:

$$B_k^m[r, s](t) = B_k^m \left( \frac{t-r}{s-r} \right).$$

**Πρόταση 6.1.** Ισχύει:

$$\sum_{k=0}^m B_k^m[r, s](t) = 1.$$

Απόδειξη. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m B_k^m[r, s](t) &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \left(\frac{s-t}{s-r}\right)^{m-k} \left(\frac{t-r}{s-r}\right)^k \\ &= \left(\frac{s-t}{s-r} + \frac{t-r}{s-r}\right)^m \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

**Πρόταση 6.2.** Ας είναι  $\mathbb{R}_m[t]$  ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές βαθμού  $\leq m$ . Τα πολυώνυμα  $B_k^m(t)$  ( $k = 0, \dots, m$ ) αποτελούν μία βάση του  $\mathbb{R}_m[t]$ .

Απόδειξη. Από την Πρόταση 6.1 έχουμε:

$$\sum_{k=0}^m B_k^m(t) = 1.$$

Αντικαθιστώντας το  $m$  από το  $m-i$ , όπου  $i = 0, \dots, m$ , παίρνουμε:

$$\sum_{j=0}^{m-i} B_j^{m-i}(t) = 1.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με  $t^i$ , προκύπτει:

$$t^i = \sum_{j=0}^{m-i} t^i B_j^{m-i}(t).$$

Από την άλλη πλευρά, εύκολα επαληθεύουμε ότι ισχύει:

$$\binom{m}{i} \binom{m-i}{j} = \binom{m}{i+j} \binom{i+j}{i}.$$

Έτσι, παίρνουμε:

$$t^i B_j^{m-i}(t) = \binom{m-i}{j} t^{i+j} (1-t)^{m-i-j} = \frac{\binom{i+j}{i}}{\binom{m}{i}} B_{i+j}^m(t).$$

Επομένως, έχουμε

$$t^i = \sum_{j=0}^{m-i} B_j^{m-i}(t) t^i = \sum_{j=0}^{m-i} \frac{\binom{i+j}{i}}{\binom{m}{i}} B_{i+j}^m(t).$$

Δηλαδή, τα πολυώνυμα  $1, t, \dots, t^m$  ανήκουν στον χώρο ο οποίος παράγεται από τα  $B_0^m(t), \dots, B_m^m(t)$ . Έτσι, καθώς τα  $1, t, \dots, t^m$  σχηματίζουν μία βάση για τον χώρο  $\mathbb{R}_m[t]$ , τα  $B_0^m(t), \dots, B_m^m(t)$  αποτελούν και αυτά μία βάση. □

Στη συνέχεια θα δώσουμε έναν τύπο για τον υπολογισμό της παραγώγου ενός πολωνύμου του Bernstein.

**Πρόταση 6.3.** *Ισχύει:*

$$\frac{d}{dt} B_k^m[r, s](t) = \frac{m}{s-r} (B_{k-1}^{m-1}[r, s](t) - B_k^{m-1}[r, s](t)).$$

*Απόδειξη.* Έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} B_k^m(t) &= \frac{d}{dt} \binom{m}{k} t^k (1-t)^{m-k} \\ &= \binom{m}{k} k t^{k-1} (1-t)^{m-k} - \binom{m}{k} (m-k) t^k (1-t)^{m-k-1} \\ &= m \binom{m-1}{k-1} t^{k-1} (1-t)^{m-k} - m \binom{m-1}{k} t^k (1-t)^{m-k-1} \\ &= m (B_{k-1}^{m-1}(t) - B_k^{m-1}(t)). \end{aligned}$$

Καθώς ισχύει:

$$B_k^m[r, s](t) = B_k^m \left( \frac{t-r}{s-r} \right),$$

παίρνουμε:

$$\frac{d}{dt} B_k^m[r, s](t) = \frac{1}{s-r} \frac{d}{dt} B_k^m \left( \frac{t-r}{s-r} \right).$$

Επομένως, έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} B_k^m[r, s](t) &= \frac{m}{s-r} \left( B_{k-1}^{m-1} \left( \frac{t-r}{s-r} \right) - B_k^{m-1} \left( \frac{t-r}{s-r} \right) \right) \\ &= \frac{m}{s-r} (B_{k-1}^{m-1}[r, s](t) - B_k^{m-1}[r, s](t)). \end{aligned}$$

□

### 6.3 Ένας Χαρακτηρισμός των Πολυωνυμικών Καμπυλών

Η επόμενη πρόταση περιγράφει μία αντιστοιχία μεταξύ των πολυωνύμων και των πολυομοπαράλληλικών απεικονίσεων.

**Πρόταση 6.4.** *Ισχύουν τα εξής:*

(α) Για κάθε  $p(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  με  $\deg p \leq m$ , υπάρχει μοναδική συμμετρική  $m$ -ομοπαράλληλική απεικόνιση  $f : (\mathbb{A}^n)^m \rightarrow \mathbb{A}$  τέτοια, ώστε να ισχύει:

$$p(x) = f(x, \dots, x), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{A}^n.$$

Αν το πολώνυμο  $p(x_1, \dots, x_n)$  είναι ομογενές και  $\deg p = m$ , τότε η απεικόνιση  $f$  είναι  $m$ -γραμμική.

(β) Αν  $f : (\mathbb{A}^n)^m \rightarrow \mathbb{A}$  είναι μία συμμετρική  $m$ -ομοπαράλληλική απεικόνιση, τότε η απεικόνιση  $p : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}$  η οποία ορίζεται από τη σχέση

$$p(x) = f(x, \dots, x), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{A}^n,$$

είναι μία ομοπαράλληλική πολυωνυμική απεικόνιση πολικού βαθμού  $m$ . Η απεικόνιση  $p(x)$  ορίζεται από ένα μοναδικό πολώνυμο  $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  με  $\deg P \leq m$ .

Απόδειξη. (α) Ας υποθέσουμε πρώτα ότι  $p(x_1, \dots, x_n) = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ , όπου  $k_1, \dots, k_n$  είναι φυσικοί αριθμοί με  $k_1 + \dots + k_n = d \leq m$ . Θεωρούμε την απεικόνιση  $f : (\mathbb{A}^n)^m \rightarrow \mathbb{A}$  με

$$f((x_{1,1}, \dots, x_{n,1}), \dots, (x_{1,m}, \dots, x_{n,m})) = \frac{k_1! \cdots k_n! (m-d)!}{m!} \sum_{\substack{I_1 \cup \dots \cup I_n \subseteq \{1, \dots, m\} \\ I_i \cap I_j = \emptyset, i \neq j, |I_j| = k_j}} \left( \prod_{i_1 \in I_1} x_{1,i_1} \right) \cdots \left( \prod_{i_n \in I_n} x_{n,i_n} \right).$$

Το πλήθος των όρων στο παραπάνω άθροισμα ισούται με το πλήθος των τρόπων κατά τους οποίους κάθε υποσύνολο του  $\{1, \dots, m\}$  το οποίο αποτελείται από  $d$  στοιχεία διαμερίζεται σε  $n$  υποσύνολα ξένα μεταξύ τους ανά δύο,  $I_1, \dots, I_n$  με  $|I_j| = k_j$ . Ο αριθμός αυτός δίνεται από την ποσότητα

$$\binom{m}{k_1, \dots, k_n, m-d} = \frac{m!}{k_1! \cdots k_n! (m-d)!}.$$

Η απεικόνιση  $f$  είναι προφανώς συμμετρική. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η  $f$  είναι  $m$ -ομοπαράλληλική απεικόνιση και στην περίπτωση όπου  $d = m$  είναι  $m$ -γραμμική. Επίσης, για κάθε  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n$ , ισχύει:

$$f((x_1, \dots, x_n), \dots, (x_1, \dots, x_n)) = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} = p(x_1, \dots, x_n).$$

Αν το πολυώνυμο  $p(x_1, \dots, x_n)$  είναι ομογενές βαθμού  $m$ , τότε είναι άθροισμα μονωνύμων της μορφής  $a_{k_1, \dots, k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ , με  $k_1 + \dots + k_n = m$  και  $a_{k_1, \dots, k_n} \in \mathbb{R}$ . Όπως είδαμε, για κάθε τέτοιο μονώνυμο υπάρχει μία συμμετρική  $m$ -γραμμική απεικόνιση  $f_{k_1, \dots, k_n} : (\mathbb{R}^n)^m \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια, ώστε για κάθε  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  να ισχύει:

$$f_{k_1, \dots, k_n}(x, \dots, x) = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}.$$

Οπότε, η πολυγραμμική απεικόνιση

$$f = \sum_{k_1, \dots, k_n} a_{k_1, \dots, k_n} f_{k_1, \dots, k_n}$$

έχει τη ζητούμενη ιδιότητα.

Ας είναι τώρα  $p(x_1, \dots, x_n)$  ένα πολυώνυμο βαθμού  $\leq m$ . Τότε, έχουμε:

$$p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k_1, \dots, k_n} a_{k_1, \dots, k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}.$$

Καθώς είδαμε παραπάνω, για κάθε μονώνυμο  $x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$  υπάρχει μία συμμετρική  $m$ -ομοπαράλληλική απεικόνιση  $f_{k_1, \dots, k_n} : (\mathbb{A}^n)^m \rightarrow \mathbb{A}$  τέτοια, ώστε για κάθε  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n$  να ισχύει:

$$f_{k_1, \dots, k_n}(x, \dots, x) = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}.$$

Σύμφωνα με το Παράδειγμα 5.8, η απεικόνιση

$$f = \sum_{k_1, \dots, k_n} a_{k_1, \dots, k_n} f_{k_1, \dots, k_n}$$

είναι  $m$ -ομοπαράλληλική. Επίσης, για κάθε  $x \in \mathbb{A}^n$ , ισχύει:

$$f(x, \dots, x) = p(x).$$

Η μοναδικότητα της απεικόνισης  $f$  είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 5.3.

(β) Η απεικόνιση  $p : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}$  είναι εξ ορισμού μία ομοπαράλληλική πολυωνυμική απεικόνιση πολικού βαθμού  $m$ . Από την Πρόταση 5.2 έπεται ότι υπάρχει πολυώνυμο  $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  με  $\deg P \leq m$  έτσι, ώστε  $p(x) = P(x)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{A}^n$ . Καθώς διαφορετικά πολυώνυμα του  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  ορίζουν διαφορετικές απεικονίσεις, συμπεραίνουμε ότι το πολυώνυμο  $P$  είναι μοναδικό.  $\square$

**Παράδειγμα 6.5.** Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$p(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1.$$

Η απεικόνιση  $f : \mathbb{A}^3 \rightarrow \mathbb{A}$  η οποία ορίζεται από τη σχέση

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 + \frac{2}{3}(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - \frac{4}{3}(x_1 + x_2 + x_3) + 1$$

για κάθε  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{A}^3$ , είναι μία συμμετρική 3-ομοπαράλληλική απεικόνιση. Επίσης, ισχύει:

$$p(x) = f(x, x, x), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{A}.$$

**Παράδειγμα 6.6.** Ας είναι το πολυώνυμο

$$p(x, y) = x^2 + y^2 + xy.$$

Η απεικόνιση  $f : (\mathbb{R}^2)^2 \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία ορίζεται από τον τύπο

$$f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) + x_1x_2 + y_1y_2$$

είναι συμμετρική, 2-γραμμική και ισχύει:

$$f((x, y), (x, y)) = p(x, y), \quad \text{για κάθε } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Στην συνέχεια δίνουμε ένα χαρακτηρισμός των πολυωνυμικών καμπυλών:

**Θεώρημα 6.2.** Ας είναι  $\mathcal{E}$  ομοπαράλληλικός χώρος διάστασης  $\geq 2$  και  $(a_0, \dots, a_n)$  ένα ομοπαράλληλικό του πλαισίου. Θετούμε  $\vec{e}_i = \bar{a}_0 \bar{a}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Τότε, μία απεικόνιση  $F : \mathbb{A} \mapsto \mathcal{E}$  είναι πολυωνυμική καμπύλη πολικού βαθμού  $m$ , αν και μόνον αν υπάρχουν πολυώνυμα  $F_i(t) \in \mathbb{R}[t]$  ( $i = 1, \dots, n$ ) με  $m \geq \max\{\deg F_1, \dots, \deg F_n\}$  έτσι, ώστε να ισχύει:

$$F(t) = a_0 + F_1(t)\vec{e}_1 + \dots + F_n(t)\vec{e}_n, \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{A}.$$

*Απόδειξη.* Θεωρούμε την απεικόνιση

$$F : \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{E}, \quad t \mapsto a_0 + F_1(t)\vec{e}_1 + \dots + F_n(t)\vec{e}_n,$$

όπου  $F_i(x) \in \mathbb{R}[x]$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Ας είναι  $m \geq \max\{\deg F_1, \dots, \deg F_n\}$ . Θα δείξουμε ότι η  $F$  είναι μία πολυωνυμική καμπύλη βαθμού  $m$ . Σύμφωνα με την Πρόταση 6.4, για κάθε  $i = 1, \dots, n$  υπάρχει μία συμμετρική  $m$ -ομοπαράλληλική απεικόνιση  $f_i : \mathbb{A}^m \rightarrow \mathbb{A}$  τέτοια, ώστε

$$F_i(t) = f_i(t, \dots, t), \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{A}.$$

Θεωρούμε την απεικόνιση  $f : \mathbb{A}^m \rightarrow \mathcal{E}$  η οποία ορίζεται από τη σχέση:

$$f(t_1, \dots, t_m) = a_0 + f_1(t_1, \dots, t_m)\vec{e}_1 + \dots + f_n(t_1, \dots, t_m)\vec{e}_n,$$

για κάθε  $(t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{A}^m$ . Καθώς οι απεικονίσεις  $f_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) είναι συμμετρικές, η απεικόνιση  $f$  είναι επίσης συμμετρική. Επιπλέον, ισχύει:

$$F(t) = f(t, \dots, t), \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{A}.$$



Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι η  $f$  είναι  $m$ -ομοπαράλληλική. Ας είναι λοιπόν  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{A}$  και  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$  με  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ . Τότε, έχουμε:

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{j=1}^k \lambda_j v_j, t_2, \dots, t_m\right) &= a_0 + \sum_{i=1}^n f_i\left(\sum_{j=1}^k \lambda_j v_j, t_2, \dots, t_m\right) \vec{e}_i \\ &= a_0 + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^k \lambda_j f_i(v_j, t_2, \dots, t_m)\right) \vec{e}_i \\ &= a_0 + \sum_{j=1}^k \lambda_j \left(\sum_{i=1}^n f_i(v_j, t_2, \dots, t_m) \vec{e}_i\right) \\ &= \sum_{j=1}^k \lambda_j \left(a_0 + \sum_{i=1}^n f_i(v_j, t_2, \dots, t_m) \vec{e}_i\right) \\ &= \sum_{j=1}^k \lambda_j f(v_j, t_2, \dots, t_m). \end{aligned}$$

Άρα, η αντιστοιχία  $t_1 \mapsto f(t_1, \dots, t_m)$  ορίζει μία ομοπαράλληλική απεικόνιση από το  $\mathbb{A}$  στο  $\mathcal{E}$ . Το ίδιο ισχύει και για τις υπόλοιπες μεταβλητές  $t_2, \dots, t_m$ . Οπότε, η  $f$  είναι  $m$ -ομοπαράλληλική απεικόνιση και κατά συνέπεια η  $F$  είναι μία πολυωνυμική καμπύλη πολικού βαθμού  $m$ .

Αντιστρόφως, ας θεωρήσουμε μία πολυωνυμική καμπύλη βαθμού  $m$ ,  $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{E}$ , και την αντίστοιχη πολική της μορφή  $f : \mathbb{A}^m \rightarrow \mathcal{E}$ . Ας είναι  $(r, s)$  ομοπαράλληλικό πλαίσιο του  $\mathbb{A}$ . Από την Ενότητα 6.1 έχουμε:

$$f(t_1, \dots, t_m) = \sum_{k=0}^m p_k(t_1, \dots, t_m) b_k,$$

όπου

$$p_k(t_1, \dots, t_m) = \sum_{\substack{I \cup J = \Sigma_m \\ I \cap J = \emptyset, |I|=k}} \prod_{i \in I} \frac{s - t_i}{s - r} \prod_{j \in J} \frac{t_j - r}{s - r},$$

και  $b_0, \dots, b_m$  είναι τα σημεία ελέγχου της  $F$ . Γράφουμε

$$b_k = a_0 + b_{k,1} \vec{e}_1 + \dots + b_{k,n} \vec{e}_n \quad (k = 0, \dots, m)$$

και έτσι έχουμε:

$$F(t) = f(t, \dots, t) = a_0 + \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=0}^m p_k(t, \dots, t) b_{k,i} \right) \vec{e}_i.$$

Θέτοντας

$$F_i(t) = \sum_{k=0}^m p_k(t, \dots, t) b_{k,i} \quad (i = 1, \dots, n),$$

παίρνουμε:

$$F(t) = a_0 + F_1(t) \vec{e}_1 + \dots + F_n(t) \vec{e}_n, \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{A}.$$

Καθώς  $\deg p_k \leq m$  ( $k = 0, \dots, m$ ), έχουμε  $\deg F_i \leq m$  ( $i = 1, \dots, n$ ). □

**Πόρισμα 6.1.** Οι πολυωνυμικές καμπύλες βαθμού  $m$  στο  $\mathbb{A}^n$  ( $n \geq 2$ ) δίνονται από τις απεικονίσεις

$$F : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}^n, \quad t \longmapsto (f_1(t), \dots, f_n(t)),$$

όπου  $f_i(t) \in \mathbb{R}[t]$  με  $\deg f_i \leq m$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

**Παράδειγμα 6.7.** Στο Παράδειγμα 6.1, είδαμε ότι η απεικόνιση  $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^3$  με

$$F(t) = (t + 2t^2, 1 - t^2, 3 + 2t), \quad \forall t \in \mathbb{A},$$

ορίζει μία πολυωνυμική καμπύλη πολικού βαθμού 2. Σύμφωνα με το Θεώρημα 6.2, καθώς ο μεγαλύτερος βαθμός των πολυωνύμων τα οποία ορίζουν την  $F$  είναι 2, ως πολικός βαθμός της  $F$  μπορεί να θεωρηθεί κάθε ακέραιος  $m \geq 2$ .

Ας θεωρήσουμε την απεικόνιση  $g : \mathbb{A}^3 \rightarrow \mathbb{A}^3$  με

$$g(t_1, t_2, t_3) =$$

$$\left( \frac{1}{3}(\sigma_1(t_1, t_2, t_3) + 2\sigma_2(t_1, t_2, t_3)), 1 - \frac{1}{3}\sigma_2(t_1, t_2, t_3), 3 + \frac{2}{3}\sigma_1(t_1, t_2, t_3) \right),$$

για κάθε  $(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{A}^3$ , όπου  $\sigma_1$  και  $\sigma_2$  είναι οι στοιχειώδεις συμμετρικές απεικονίσεις. Η απεικόνιση  $g$  είναι συμμετρική, 3-ομοπαράλληλη και για κάθε  $t \in \mathbb{A}$  ισχύει  $F(t) = g(t, t, t)$ . Άρα, η  $g$  είναι η 3-πολική μορφή της  $F$ .

#### 6.4 Μορφή του *Bézier*

Ας είναι  $r, s \in \mathbb{A}$  με  $r < s$  και  $\mathcal{E}$  ομοπαράλληλος χώρος διάστασης  $\geq 2$  και  $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{E}$  μία πολυωνυμική καμπύλη πολικού βαθμού  $m$ . Αν  $b_0, \dots, b_m$  είναι τα σημεία ελέγχου της  $F$ , τότε, καθώς είδαμε στην Ενότητα 2.3, είναι δυνατόν η  $F$  να τεθεί στην εξής μορφή:

$$F(t) = \sum_{k=0}^m B_k^m[r, s](t) b_k,$$

όπου

$$B_k^m[r, s](t) = \binom{m}{k} \left( \frac{s-t}{s-r} \right)^{m-k} \left( \frac{t-r}{s-r} \right)^k \quad (k = 0, \dots, m).$$

**Ορισμός 6.4.** Η παραπάνω μορφή της πολυωνυμικής καμπύλης  $F$  καλείται *μορφή του Bézier*

Παρατηρούμε ότι η καμπύλη  $F$  ορίζεται πλήρως από τα σημεία ελέγχου της που αντιστοιχούν στο ομοπαράλληλο πλαίσιο  $(r, s)$ .

Αν πάρουμε  $r = 0$  και  $s = 1$ , τότε έχουμε την εξής απλούστερη μορφή:

$$F(t) = \sum_{k=0}^m B_k^m(t) b_k = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (1-t)^{m-k} t^k b_k.$$

Συμβολίζουμε με  $\mathcal{B}_{(r,s)}[b_0, \dots, b_m]$  την καμπύλη που ορίζεται από τα σημεία  $b_0, \dots, b_m$  επί του ομοπαράλληλου πλαισίου  $(r, s)$ . Επίσης, συμβολίζουμε με  $\mathcal{B}_{(r,s)}[b_0, \dots, b_m](t)$  το σημείο της καμπύλης που αντιστοιχεί στο στοιχείο  $t \in \mathbb{A}$ .

**Παράδειγμα 6.8.** Θεωρούμε τα εξής σημεία του  $\mathbb{A}^2$ :

$$b_0 = (2.388451, 7.322835), \quad b_1 = (7.610389, 7.974025),$$

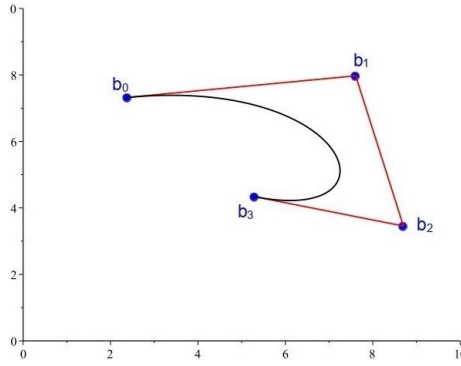
$$b_2 = (8.701298, 3.454545), \quad b_3 = (5.298701, 4.337662).$$

Τα παραπάνω σημεία ορίζουν μία πολυωνυμική καμπύλη πολικού βαθμού 3,  $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^2$ , επί του ομοπαράλληλου πλαισίου  $(0, 1)$ , η οποία δίνεται από τη σχέση  $F(t) = (x(t), y(t))$ , για κάθε  $t \in \mathbb{A}$ , όπου

$$x(t) = -0.3624774t^3 - 12.39309t^2 + 15.66581t + 2.388451,$$

$$y(t) = 10.57327t^3 - 15.51202t^2 + 1.953574t + 7.322835.$$

Το σχήμα του τμήματος  $F(0, 1)$  δίνεται στο Σχήμα 6.4.



Σχήμα 6.4: Το τμήμα της καμπύλης του Παραδείγματος 6.8.

Στη συνέχεια, θα δώσουμε μερικές βασικές ιδιότητες της μορφής του Βέζιερ μιας πολυωνυμικής καμπύλης.

**Αναλλοίωτη από Ομοπαράλληλικές Απεικονίσεις:** Για κάθε ομοπαράλληλική απεικόνιση  $\alpha : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  ισχύει:

$$\alpha(\mathcal{B}_{(r,s)}[b_0, \dots, b_m](t)) = \mathcal{B}_{(r,s)}[\alpha(b_0), \dots, \alpha(b_m)](t), \quad \forall t \in \mathbb{A}.$$

Πράγματι, από την Πρόταση 6.1 έχουμε

$$\sum_{k=0}^m B_k^m[r, s](t) = 1$$

και επομένως η τιμή  $\mathcal{B}_{(r,s)}[b_0, \dots, b_m](t)$  είναι ένα βαρύκεντρο των  $b_0, \dots, b_m$ . Έτσι, επειδή η απεικόνιση  $\alpha$  είναι ομοπαράλληλική, για κάθε  $t \in \mathbb{A}$ , έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha(\mathcal{B}_{(r,s)}[b_0, \dots, b_m](t)) &= \alpha\left(\sum_{k=0}^m B_k^m[r, s](t)b_k\right) \\ &= \sum_{k=0}^m B_k^m[r, s](t)\alpha(b_k) \\ &= \mathcal{B}_{(r,s)}[\alpha(b_0), \dots, \alpha(b_m)](t). \end{aligned}$$

Επομένως, η εικόνα του ίχνους της  $\mathcal{B}_{(r,s)}[b_0, \dots, b_m]$  διά μέσου της  $\alpha$  είναι το ίχνος της καμπύλης  $\mathcal{B}_{(r,s)}[\alpha(b_0), \dots, \alpha(b_m)]$ .

Έτσι, αν θέλουμε να μετακινήσουμε μία καμπύλη με την εφαρμογή μίας ομοπαράλληλικής απεικόνισης, δεν χρειάζεται να την εφαρμόσουμε σε κάθε σημείο της αλλά μόνο στα σημεία ελέγχου της με άμεση συνέπεια τη σημαντική μείωση του αναγκαίου υπολογιστικού χρόνου.

**Αναλλοίωτη από Μετασχηματισμούς της Παραμέτρου:** Η καμπύλη  $F(t)$  σε μορφή του Βέζιερ η οποία ορίζεται από τα σημεία ελέγχου  $b_0, \dots, b_m$  επί του διαστήματος  $[r, s]$  είναι η ίδια με την  $F((t-r)/(s-r))$  η οποία ορίζεται από τα  $b_0, \dots, b_m$  επί του  $[0, 1]$ , δηλαδή ισχύει η σχέση:

$$\mathcal{B}_{(r,s)}[b_0, \dots, b_m](t) = \mathcal{B}_{(0,1)}[b_0, \dots, b_m]\left(\frac{t-r}{s-r}\right).$$

Πράγματι, έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{(r,s)}[b_0, \dots, b_m](t) &= \sum_{k=0}^m B_k^m[r, s](t)b_k \\ &= \sum_{k=0}^m B_k^m\left(\frac{t-r}{s-r}\right)b_k \\ &= \mathcal{B}_{(0,1)}[b_0, \dots, b_m]\left(\frac{t-r}{s-r}\right).\end{aligned}$$

Επίσης, για κάθε  $q \in \mathbb{R}$  με  $q > 0$ , ισχύει:

$$\mathcal{B}_{(r,r+q)}[b_0, \dots, b_m](t) = \mathcal{B}_{(0,q)}[b_0, \dots, b_m](t-r).$$

Για την απόδειξη, έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{(r,r+q)}[b_0, \dots, b_m](t) &= \sum_{k=0}^m B_k^m[r, r+q](t)b_k \\ &= \sum_{k=0}^m B_k^m\left(\frac{t-r}{q}\right)b_k \\ &= \sum_{k=0}^m B_k^m[0, q](t-r)b_k \\ &= \mathcal{B}_{(0,q)}[b_0, \dots, b_m](t-r).\end{aligned}$$

**Ιδιότητα του Κυρτού Καλύμματος:** Για κάθε  $t \in [r, s]$ , το σημείο  $F(t)$  ανήκει στο κυρτό κάλυμμα των  $b_0, \dots, b_m$ .

Πράγματι, για κάθε  $t \in [r, s]$ , έχουμε  $B_k^m[r, s](t) \geq 0$ . Άρα, το σημείο  $F(t) = \mathcal{B}_{(r,s)}[b_0, \dots, b_m](t)$  είναι ένας κυρτός συνδυασμός των  $b_0, \dots, b_m$  και επομένως ανήκει στο κυρτό κάλυμμά τους.

**Παρεμβολή Ακραίων Σημείων:** Τα σημεία  $b_0$  και  $b_m$  είναι σημεία της καμπύλης  $F(t)$ .

**Συμμετρία:** Για κάθε  $t \in [r, s]$ , ισχύει:

$$\mathcal{B}_{(r,s)}[b_0, \dots, b_m](r+s-t) = \mathcal{B}_{(r,s)}[b_m, \dots, b_0](t).$$

Έχουμε:

$$B_k^m[r, s](r+s-t) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \left(\frac{t-r}{s-r}\right)^{m-k} \left(\frac{s-t}{s-r}\right)^k = B_{m-k}^m[r, s](t).$$

Έτσι, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{(r,s)}[b_0, \dots, b_m](r+s-t) &= \sum_{k=0}^m B_k^m[r, s](r+s-t)b_k \\ &= \sum_{k=0}^m B_{m-k}^m[r, s](t)b_k \\ &= \mathcal{B}_{(r,s)}[b_m, \dots, b_0](t).\end{aligned}$$

**Γραμμική Ακρίβεια:** Αν τα σημεία  $b_0, \dots, b_m$  ανήκουν σε μία ευθεία  $\mathcal{L}$  του  $\mathcal{E}$  και τουλάχιστον δύο από αυτά είναι διαφορετικά, τότε η καμπύλη  $F(t)$  ταυτίζεται με την ευθεία  $\mathcal{L}$ .

Πράγματι, καθώς τα σημεία της  $F(t)$  είναι βαρυστασιαστικοί συνδυασμοί των σημείων  $b_0, \dots, b_m$  τα οποία ανήκουν στην ευθεία  $\mathcal{L}$ , τότε από την Πρόταση 1.6 έπεται ότι τα σημεία της  $F(t)$  ανήκουν στην  $\mathcal{L}$  και επομένως η καμπύλη  $F(t)$  ταυτίζεται με την ευθεία  $\mathcal{L}$ .

**Αύξηση Βαθμού:** Ας είναι  $f : \mathbb{A}^m \rightarrow \mathcal{E}$  η πολική μορφή της καμπύλης  $F$ . Η  $f$  μπορεί ν' αντικατασταθεί με μία άλλη πολική μορφή βαθμού  $m+1$  και κατά συνέπεια η καμπύλη  $F$  να χαρακτηριστεί ως καμπύλη πολικού βαθμού  $m+1$ . Αυτό γίνεται εύκολα θεωρώντας την απεικόνιση  $g : \mathbb{A}^{m+1} \rightarrow \mathcal{E}$  η οποία δίνεται από τη σχέση

$$g(t_1, \dots, t_{m+1}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq m+1} \frac{1}{m+1} f(t_{i_1}, \dots, t_{i_m}).$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η απεικόνιση  $g$  είναι  $m+1$ -ομοπαράλληλική, συμμετρική και για κάθε  $t \in \mathbb{A}$  ισχύει:

$$g(t, \dots, t) = f(t, \dots, t) = F(t).$$

Σ' αυτή την περίπτωση τα σημεία ελέγχου της  $F$ ,  $b_0^1, \dots, b_{m+1}^1$ , δίνονται από τις σχέσεις

$$b_0^1 = g(r, \dots, r) = f(r, \dots, r) = b_0, \quad b_{m+1}^1 = g(s, \dots, s) = f(s, \dots, s) = b_m$$

και για κάθε  $i = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} b_i^1 &= g(\underbrace{r, \dots, r}_{m+1-i}, \underbrace{s, \dots, s}_i) \\ &= \frac{i}{m+1} f(\underbrace{r, \dots, r}_{m+1-i}, \underbrace{s, \dots, s}_{i-1}) + \frac{m+1-i}{m+1} f(\underbrace{r, \dots, r}_{m-i}, \underbrace{s, \dots, s}_i) \\ &= \frac{i}{m+1} b_{i-1} + \frac{m+1-i}{m+1} b_i. \end{aligned}$$

Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία μπορούμε να μεγαλώσουμε τον βαθμό της πολικής μορφής της  $F$  όσο επιθυμούμε.

**Παράδειγμα 6.9.** Θεωρούμε την ομοπαράλληλική απεικόνιση  $h : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$  με

$$h(x, y) = (x + y, 2x - y + 1), \quad \text{για κάθε } (x, y) \in \mathbb{A}^2,$$

και το σύνολο

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 / y^2 = x^3 + x^2\}.$$

Θα δείξουμε ότι το  $h(S)$  είναι το ίχνος μίας πολυωνυμικής καμπύλης  $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^2$  πολικού βαθμού 3 και θα προσδιορίσουμε τα σημεία ελέγχου της  $F$  ως προς το ομοπαράλληλικό πλαίσιο  $(0, 2)$  του  $\mathbb{A}$ .

Από το Παράδειγμα 6.4 έχουμε ότι το σύνολο  $S$  είναι το ίχνος της πολυωνυμικής καμπύλης πολικού βαθμού 3 η οποία ορίζεται από την απεικόνιση

$$G : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^2, \quad t \mapsto (t^2 - 1, t(t^2 - 1)).$$

Τα σημεία ελέγχου της  $G$  ως προς το ομοπαράλληλικό πλαίσιο  $(0, 2)$  είναι τα σημεία

$$b_0 = (-1, 0), \quad b_1 = (-1, -2/3), \quad b_2 = (1/3, -4/3), \quad b_3 = (3, 6).$$

Καθώς η μορφή του Βέζιερ είναι αναλλοίωτη από τις ομοπαράλληλικές απεικονίσεις, η εικόνα του  $S$  διά μέσου του  $h$  είναι το ίχνος της καμπύλης  $F = \mathcal{B}_{(0,2)}[h(b_0), h(b_1), h(b_2), h(b_3)]$ . Τα σημεία ελέγχου της, ως προς το ομοπαράλληλικό πλαίσιο  $(2, 0)$ , είναι τα σημεία

$$h(b_0) = (-1, -1), \quad h(b_1) = (-4/3, -2/3),$$

$$h(b_2) = (-4/3, 1/3), \quad h(b_3) = (0, 1).$$

Πιο συγκεκριμένα, η καμπύλη αυτή δίνεται από τη σχέση

$$F(t) = \sum_{k=0}^3 B_k^3[0, 2](t) h(b_k) = \frac{1}{8}(t^3 + 2t^2 - 4t - 8, -t^3 + 4t^2 + 4t - 8).$$

**Παράδειγμα 6.10.** Θεωρούμε την πολυωνυμική καμπύλη

$$F : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}^3, \quad t \longmapsto (t^3 + 1, 3t - 1, 6t^2).$$

Καθώς ο μέγιστος βαθμός των πολυωνύμων τα οποία αποτελούν την  $F$  είναι 3, ο μικρότερος ακέραιος  $m$  για τον οποίο υπάρχει μία  $m$ -πολική μορφή για την  $F$  είναι  $m = 3$ . Η 3-πολική μορφή της  $F$  είναι η απεικόνιση  $f : \mathbb{A}^3 \longrightarrow \mathbb{A}^3$  η οποία ορίζεται ως εξής:

$$f(t_1, t_2, t_3) = (t_1 t_2 t_3 + 1, t_1 + t_2 + t_3 - 1, 2(t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_1 t_3)), \quad \forall (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{A}^3.$$

Η 4-πολική μορφή της  $F$  είναι η απεικόνιση  $g : \mathbb{A}^4 \longrightarrow \mathbb{A}^3$  η οποία ορίζεται από τη σχέση

$$g(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{1}{4}f(t_1, t_2, t_3) + \frac{1}{4}f(t_1, t_2, t_4) + \frac{1}{4}f(t_2, t_3, t_4) + \frac{1}{4}f(t_1, t_3, t_4).$$

Έτσι, έχουμε:

$$g(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{1}{4}(\sigma_3(t_1, t_2, t_3, t_4) + 4, 3\sigma_1(t_1, t_2, t_3, t_4) - 4, 4\sigma_2(t_1, t_2, t_3, t_4)),$$

όπου  $\sigma_i(t_1, t_2, t_3, t_4)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) είναι οι αντίστοιχες στοιχειώδεις συμμετρικές απεικονίσεις του  $\mathbb{R}^4$ .

Τα σημεία ελέγχου της  $F$ , θεωρουμένης ως καμπύλης πολικού βαθμού 4, ως προς το ομοπαράλληλικό πλαίσιο  $(1, 2)$  είναι τα εξής:

$$\begin{aligned} g(1, 1, 1, 1) &= (2, 2, 6), \\ g(1, 1, 1, 2) &= (11/4, 11/4, 9), \\ g(1, 1, 2, 2) &= (4, 7/2, 13), \\ g(1, 2, 2, 2) &= (6, 17/4, 16), \\ g(2, 2, 2, 2) &= (9, 5, 24). \end{aligned}$$

## 6.5 Ασκήσεις-Εργασίες

### Ασκήσεις

**6.5.1** Να δειχθεί ότι ισχύει:

$$B_k^m(t) = (1-t)B_k^{m-1}(t) + tB_{k-1}^{m-1}(t).$$

**6.5.2** Να δειχθεί ότι ισχύει:

$$B_k^{m-1}(t) = \frac{m-k}{m}B_k^m(t) + \frac{k+1}{m}B_{k+1}^m(t).$$

**6.5.3** Να δειχθεί ότι για  $t = k/m$ , το πολυώνυμο  $B_k^m(t)$  παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

**6.5.4** Θεωρούμε την πολυωνυμική καμπύλη

$$F : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}^2, t \longmapsto (3(t-2)^2 + 3, 3t(t-2)^2 + 3t).$$

Να βρεθεί η 3-πολική μορφή  $f$  της  $F$  και τα σημεία ελέγχου της  $F$  ως προς την  $f$  και το ομοπαράλληλο πλαίσιο  $r = -1, s = 1$ . Να γίνει το ίδιο και με την 4-πολική μορφή της  $F$ .

**6.5.5** Θεωρούμε την πολυωνυμική καμπύλη

$$F : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}^3, t \longmapsto (t, t^2, t^3),$$

Να βρεθεί η 3-πολική μορφή  $f$  της  $F$  και τα σημεία ελέγχου της  $F$  ως προς την  $f$  και το ομοπαράλληλο πλαίσιο  $r = -2, s = 3$ . Να γίνει το ίδιο και με την 5-πολική μορφή της  $F$ .

**6.5.6** Ας είναι  $F : \mathbb{A} \longrightarrow \mathcal{E}$  μία πολυωνυμική καμπύλη πολικού βαθμού 3. Να δειχθεί ότι η πολική της μορφή  $f : \mathbb{A}^3 \longrightarrow \mathcal{E}$  μπορεί να εκφραστεί ως

$$f(u, v, w) = \frac{1}{24} \left[ 27F\left(\frac{u+v+w}{3}\right) - F(u+v-w) - F(u+w-v) - F(v+w-u) \right].$$

**6.5.7** Ας είναι  $F : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}^2$  η πολυωνυμική καμπύλη με σημεία ελέγχου

$$b_0 = (-1, 1), b_1 = (2, 0), b_2 = (1, -1), b_3 = (1, 2),$$

ως προς το ομοπαράλληλο πλαίσιο  $r = 0$  και  $s = 1$ . Να βρεθεί η 3-πολική μορφή της  $F$ , κατόπιν να αυξηθεί κατά ένα ο βαθμός της και να βρεθούν τα σημεία ελέγχου που αντιστοιχούν στην αύξησή της.

**6.5.8** Να βρεθεί η πολική μορφή ελαχίστου βαθμού της πολυωνυμικής καμπύλης

$$F : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}^3, t \longmapsto (t^2 + 2, 3t^3 - 1, 6t^2 + 1).$$

Κατόπιν, ν' αυξηθεί ο βαθμός της κατά ένα και να υπολογιστούν τα σημεία ελέγχου της ως προς την πολική που θα προκύψει και το ομοπαράλληλο πλαίσιο  $(-1, 1)$ .

**6.5.9** Ας είναι  $F$  μία πολυωνυμική καμπύλη η οποία ορίζεται από τα σημεία ελέγχου

$$b_0 = (0, 1, 1), b_1 = (1, 0, 1), b_2 = (0, 0, 1), b_3 = (2, 2, 1), b_4 = (-1, 2, 1),$$

ως προς το ομοπαράλληλο πλαίσιο  $(0, 1)$ . Να βρεθούν τα σημεία ελέγχου που θα προκύψουν μετά από αύξηση του βαθμού της  $F$  κατά ένα.

**6.5.10** Θεωρούμε το σύνολο

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 / y = x^3 + 4x\}.$$

Να δειχθεί ότι το σύνολο  $C$  είναι το ίχνος μίας πολυωνυμικής απεικόνισης  $F$ . Να βρεθεί η πολική μορφή της  $F$  μικροτέρου βαθμού  $f$  και να χρησιμοποιηθεί για να υπολογιστούν τα σημεία ελέγχου της  $F$  ως προς το πλαίσιο  $(-1, 1)$ .

**6.5.11** Ας είναι  $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{E}$  μία πολυωνυμική καμπύλη πολικού βαθμού 3 με σημεία ελέγχου  $b_0^1, b_1^1, b_2^1, b_3^1$ . Να δειχθεί ότι η  $F$  έχει πολικό βαθμό 2 αν και μόνον αν ισχύει:

$$b_0^1 + \frac{3}{2} \overrightarrow{b_0^1 b_1^1} = b_3^1 + \frac{3}{2} \overrightarrow{b_3^1 b_2^1}.$$

6.5.12 Θεωρούμε την ομοπαράλληλική απεικόνιση  $h : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$  με

$$h(x, y) = (x - y + 1, y + x), \text{ για κάθε } (x, y) \in \mathbb{A}^2,$$

και το σύνολο

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 / y = x^3 + 3x^2 - 1\}.$$

Να δειχθεί ότι το  $h(G)$  είναι το ίχνος μίας πολυωνυμικής καμπύλης  $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^2$  πολικού βαθμού 3 και να βρεθούν τα σημεία ελέγχου της  $F$  ως προς το ομοπαράλληλικό πλαίσιο  $(0, 1)$  του  $\mathbb{A}$ .

## Βιβλιογραφία

- [1] N. Carter. *Introduction to the Mathematics of Computer Graphics*. Mathematical Association of America, 2016.
- [2] Tony deRose, Michael Lounsbery και Ronald Goldman. “A Tutorial Introduction to Blossoming”. Στο: *Geometric Modeling*. Επιμέλεια υπό Hans Hagen και Dieter Roller. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1991, σσ. 267–286.
- [3] G. Farine. *Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design, A practical Guide*. San Diego: Academic Press, 1997.
- [4] J. Gallier. *Curves and Surfaces in Geometric Modelling: Theory and Algorithms*. San Francisco: The Morgan-Kaufmann Series in Computer Graphics. Morgan-Kauffman Publishers, 1999.
- [5] J. Hoschek. *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*. AK Peters, 1993.
- [6] M.E. Mortenson. *Geometric Modelling*. Industrial Press Inc, 2006.
- [7] H. Prautzsch, W. Boehm και M. Paluszny. *Bézier and B-Spline Techniques*. Springer, 2002.
- [8] L. Ramshaw. “Blossoms are polar forms”. Στο: *Computer Aided Geometric Design* 6.4 (1989), σσ. 323–358.
- [9] Thomas W. Sederberg. *Computer Aided Geometric Design*. Faculty Publications, 2012.
- [10] H.P. Seidel. “An introduction to polar forms”. Στο: *IEEE Computer Graphics and Applications* 13.1 (1993), σσ. 38–46.
- [11] Θ. Θεοχάρης και Α. Μπεμ. *Γραφικά. Αρχές και Αλγόριθμοι*. Εκδόσεις Συμμετρία, 1999.





## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

---

# ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

---

### Σύνοψη

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τον αλγόριθμο του de Casteljau, τον αλγόριθμο Υποδιαίρεσης και τον αλγόριθμο του de Boor. Επιπλέον, θ' ασχοληθούμε με τις παραγώγους των καμπυλών καθώς και τη συνένωσή τους. Για πιο εκτεταμένη μελέτη αυτών των θεμάτων ο αναγνώστης μπορεί ν' απευθυνθεί στα συγγράμματα τα οποία παρατίθενται στο τέλος του κεφαλαίου.

### 7.1 Αλγόριθμος του *de Casteljau*

Σ' αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε τον αλγόριθμο του Paul de Faget de Casteljau τον οποίο ανέπτυξε το 1959, κατά τη διάρκεια της εργασίας του στη γνωστή αυτοκινητοβιομηχανία Citroën. Ο αλγόριθμος αυτός είναι μία απλή αναδρομική μέθοδος για τον υπολογισμό των σημείων μίας καμπύλης  $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{E}$  με τη χρήση μόνο των σημείων ελέγχου της,  $b_0, \dots, b_m$ , ως προς ένα ομοπαράλληλο πλαίσιο  $(r, s)$  (με  $r < s$ ). Αν και τα σημεία της  $F(t)$  μπορούν να υπολογιστούν από τη μορφή του Bézier της, ο αλγόριθμος αυτός είναι προτιμότερος καθώς παρέχει υπολογιστικά πλεονεκτήματα (π.χ. πολύ εύκολη υλοποίηση, αριθμητική σταθερότητα) και έτσι είναι από τις βασικότερες μεθόδους για τη σχεδίαση καμπυλών.

Για την καλύτερη κατανόησή του, θα παρουσιάσουμε τον αλγόριθμο πρώτα για τις περιπτώσεις  $m = 2, 3$ .

#### 7.1.1 Η Περίπτωση $m = 2$

Ας υποθέσουμε ότι η καμπύλη  $F$  έχει πολικό βαθμό 2 και  $f : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathcal{E}$  η πολική μορφή της. Θεωρούμε ότι τα σημεία ελέγχου  $b_0 = f(r, r)$ ,  $b_1 = f(r, s)$ ,  $b_2 = f(s, s)$  που αντιστοιχούν στο ομοπαράλληλο πλαίσιο  $(r, s)$ , είναι γνωστά και θα προσδιορίσουμε το σημείο  $F(t) = f(t, t)$ , όπου  $t \in \mathbb{A}$ .

Καθώς  $t \in \mathbb{A}$ , υπάρχει  $\lambda \in \mathbb{R}$  τέτοιο, ώστε  $t = (1 - \lambda)r + \lambda s$ . Πιο συγκεκριμένα, έχουμε:

$$\lambda = \frac{t - r}{s - r}.$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε:

$$f(r, t) = f(r, (1 - \lambda)r + \lambda s) = (1 - \lambda)f(r, r) + \lambda f(r, s)$$

και

$$f(t, s) = f((1 - \lambda)r + \lambda s, s) = (1 - \lambda)f(r, s) + \lambda f(s, s).$$

Επειδή η  $f$  είναι συμμετρική, ισχύει  $f(t, r) = f(r, t)$ . Οπότε, γνωρίζοντας τις τιμές  $f(t, r)$  και  $f(t, s)$  μπορούμε να υπολογίσουμε:

$$f(t, t) = f(t, (1 - \lambda)r + \lambda s) = (1 - \lambda)f(t, r) + \lambda f(t, s).$$

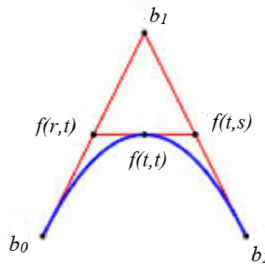
Έτσι, προκύπτει το σημείο  $F(t) = f(t, t)$ .

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζεται συνοπτικά ο αλγόριθμος για  $m = 2$ .

	1	2
$f(r, r)$		
	$f(r, t)$	
$f(r, s)$		$f(t, t)$
	$f(t, s)$	
$f(s, s)$		

ΠΙΝΑΚΑΣ 1. Αλγόριθμος του de Casteljau για  $m = 2$ .

Επίσης, στο παρακάτω σχήμα δίνεται μία παράσταση του αλγορίθμου για  $m = 2$ . Με  $b_0, b_1, b_2$  έχουμε συμβολίσει τα σημεία ελέγχου της καμπύλης.



Σχήμα 7.1: Αλγόριθμος του de Casteljau για  $m = 2$ .

**Παράδειγμα 7.1.** Ας είναι

$$b_0 = (0, 1, 0), \quad b_1 = (1, 2, 3), \quad b_2 = (-2, 1, 0)$$

τα σημεία ελέγχου της καμπύλης πολικού βαθμού 2,  $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^3$ , τα οποία αντιστοιχούν στο ομοπαράλληλο πλαίσιο  $(0, 1)$ . Συμβολίζουμε με  $f$  την πολική μορφή της  $F$ .

Θα υπολογίσουμε, χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του de Casteljau, το σημείο της  $F$  που αντιστοιχεί στην τιμή  $t = 3$ . Καθώς  $\lambda = (t - 0)/(1 - 0) = 3$ , έχουμε:

$$f(0, 3) = (1 - \lambda)f(0, 0) + \lambda f(0, 1) = -2b_0 + 3b_1 = (3, 4, 9),$$

$$f(3, 1) = (1 - \lambda)f(0, 1) + \lambda f(1, 1) = -2b_1 + 3b_2 = (-8, -1, -6).$$

Τέλος, υπολογίζουμε:

$$f(3, 3) = -2(3, 4, 9) + 3(-8, -1, -6) = (-30, -11, -36).$$

Άρα  $F(3) = (-30, -11, -36)$ .

Γενικότερα, η μέθοδος αυτή είναι αποτελεσματική και για τον υπολογισμό της τιμής  $f(t_1, t_2)$ . Πράγματι, τότε υπάρχουν  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  έτσι, ώστε

$$t_i = (1 - \lambda_i)r + \lambda_i s \quad (i = 1, 2).$$

Υπολογίζουμε:

$$f(r, t_1) = f(r, (1 - \lambda_1)r + \lambda_1 s) = (1 - \lambda_1)f(r, r) + \lambda_1 f(r, s)$$

και

$$f(t_1, s) = f((1 - \lambda_1)r + \lambda_1 s, s) = (1 - \lambda_1)f(r, s) + \lambda_1 f(s, s).$$

Καθώς  $f(t_1, r) = f(r, t_1)$  και οι τιμές  $f(r, t_1)$  και  $f(t_1, s)$  είναι γνωστές, μπορούμε να υπολογίσουμε

$$f(t_1, t_2) = f(t_1, (1 - \lambda_2)r + \lambda_2 s) = (1 - \lambda_2)f(t_1, r) + \lambda_2 f(t_1, s).$$

Η διαδικασία αυτή δίνεται συνοπτικά στον παρακάτω Πίνακα 2:

	1	2
$f(r, r)$		
	$f(r, t_1)$	
$f(r, s)$		$f(t_1, t_2)$
	$f(t_1, s)$	
$f(s, s)$		

ΠΙΝΑΚΑΣ 2. Υπολογισμός της τιμής  $f(t_1, t_2)$ .

### 7.1.2 Η Περίπτωση $m = 3$

Ας υποθέσουμε ότι η καμπύλη  $F$  έχει πολικό βαθμό 3 και ας είναι  $f : \mathbb{A}^3 \rightarrow \mathcal{E}$  η πολική μορφή της. Θεωρούμε ότι τα σημεία ελέγχου της,  $b_0 = f(r, r, r)$ ,  $b_1 = f(r, r, s)$ ,  $b_2 = f(r, s, s)$ ,  $b_3 = f(s, s, s)$ , τα οποία αντιστοιχούν στο ομοπαράλληλο πλαίσιο  $(r, s)$ , είναι γνωστά και θα υπολογίσουμε το σημείο  $F(t) = f(t, t, t)$ , όπου  $t \in \mathbb{A}$ .

Θέτουμε

$$\lambda = \frac{t - r}{s - r}$$

και έχουμε  $t = (1 - \lambda)r + \lambda s$ . Τα βήματα του αλγορίθμου είναι τα εξής:

1. Υπολογίζουμε:

$$(\alpha) \quad f(r, r, t) = f(r, r, (1 - \lambda)r + \lambda s) = (1 - \lambda)f(r, r, r) + \lambda f(r, r, s),$$

$$(\beta) \quad f(r, t, s) = f(r, (1 - \lambda)r + \lambda s, s) = (1 - \lambda)f(r, r, s) + \lambda f(r, s, s),$$

$$(\gamma) \quad f(t, s, s) = f((1 - \lambda)r + \lambda s, s, s) = (1 - \lambda)f(r, s, s) + \lambda f(s, s, s).$$

2. Υπολογίζουμε:

$$(\alpha) \quad f(t, t, r) = f(t, (1 - \lambda)r + \lambda s, r) = (1 - \lambda)f(t, r, r) + \lambda f(t, s, r),$$

$$(\beta) \quad f(t, t, s) = f(t, (1 - \lambda)r + \lambda s, s) = (1 - \lambda)f(t, r, s) + \lambda f(t, s, s).$$

3. Υπολογίζουμε:

$$f(t, t, t) = f(t, t, (1 - \lambda)r + \lambda s) = (1 - \lambda)f(t, t, r) + \lambda f(t, t, s).$$

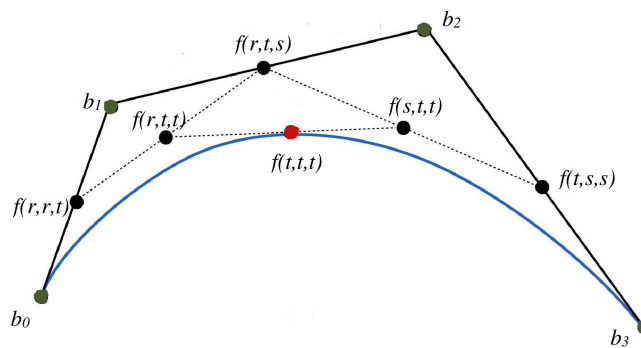
Καθώς  $f(r, r, t) = f(t, r, r)$ ,  $f(r, t, s) = f(t, s, r)$  και  $f(t, s, s) = f(t, t, s)$ , η παραπάνω διαδικασία μας δίνει την τιμή  $F(t) = f(t, t, t)$ .

Ο Πίνακας 3 παρουσιάζει συνοπτικά τον αλγόριθμο του de Casteljau για  $m = 3$ .

	1	2	3
$f(r, r, r)$			
	$f(r, r, t)$		
$f(r, r, s)$		$f(t, t, r)$	
	$f(r, t, s)$		$f(t, t, t)$
$f(r, s, s)$		$f(t, t, s)$	
	$f(t, s, s)$		
$f(s, s, s)$			

ΠΙΝΑΚΑΣ 3. Αλγόριθμος του de Casteljau για  $m = 3$ .

Το επόμενο σχήμα δίνει μία παράσταση του αλγορίθμου για  $m = 3$ . Τα σημεία  $b_0, b_1, b_2$  και  $b_3$  είναι τα σημεία ελέγχου της καμπύλης.



Σχήμα 7.2: Αλγόριθμος του de Casteljau για  $m = 3$ .

Όπως και στην περίπτωση  $m = 2$ , η διαδικασία αυτή μπορεί να γενικευτεί για τον υπολογισμό της τιμής  $f(t_1, t_2, t_3)$ . Την παρουσιάζουμε συνοπτικά στον παρακάτω Πίνακα 4.

	1	2	3
$f(r, r, r)$			
	$f(r, r, t_1)$		
$f(r, r, s)$		$f(t_1, t_2, r)$	
	$f(r, t_1, s)$		$f(t_1, t_2, t_3)$
$f(r, s, s)$		$f(t_1, t_2, s)$	
	$f(t_1, s, s)$		
$f(s, s, s)$			

ΠΙΝΑΚΑΣ 4. Υπολογισμός της τιμής  $f(t_1, t_2, t_3)$ .

**Παράδειγμα 7.2.** Θεωρούμε τα σημεία του  $\mathbb{A}^3$ :

$$b_0 = (1, 0, 0), \quad b_1 = (0, 2, 1), \quad b_2 = (-1, 1, -1), \quad b_3 = (2, 3, 0).$$

Ας είναι  $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^3$  η καμπύλη πολικού βαθμού 3 με σημεία ελέγχου τα  $b_0, b_1, b_2, b_3$  τα οποία αντιστοιχούν στο ομοπαράλληλο πλαίσιο  $(0, 1)$  και  $f : \mathbb{A}^3 \rightarrow \mathbb{A}^3$  η πολική μορφή της.

Θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο του de Casteljau για να υπολογίσουμε το σημείο  $F(2)$ . Έχουμε  $2 = -1 \cdot 0 + 2 \cdot 1$ . Υπολογίζουμε:

$$f(0, 0, 2) = -f(0, 0, 0) + 2f(0, 0, 1) = -(1, 0, 0) + 2(0, 2, 1) = (-1, 4, 2),$$

$$f(0, 2, 1) = -f(0, 0, 1) + 2f(0, 1, 1) = -(0, 2, 1) + 2(-1, 1, -1) = (-2, 0, -3),$$

$$f(2, 1, 1) = -f(0, 1, 1) + 2f(1, 1, 1) = -(-1, 1, -1) + 2(2, 3, 0) = (5, 5, 1).$$

Κατόπιν, υπολογίζουμε:

$$f(2, 2, 0) = -(-1, 4, 2) + 2(-2, 0, -3) = (-3, -4, -8)$$

και

$$f(2, 2, 1) = -(-2, 0, -3) + 2(5, 5, 1) = (12, 10, 5).$$

Τελικά, παίρνουμε:

$$F(2) = f(2, 2, 2) = -(-3, -4, -8) + 2(12, 10, 5) = (27, 24, 18).$$

### 7.1.3 Η Γενική Περίπτωση

Τέλος, θα παρουσιάσουμε τον αλγόριθμο του de Casteljau στη γενική περίπτωση.

**Αλγόριθμος 7.1.** Αλγοριθμος του de Casteljau.

*Είσοδος:* Μία καμπύλη  $F$  πολικού βαθμού  $m$ , τα σημεία ελέγχου  $b_0, \dots, b_m$  της  $F$  ως προς ένα ομοπαράλληλο πλαίσιο  $(r, s)$  του  $\mathbb{A}$  και  $t \in \mathbb{A}$ .

*Έξοδος:* Το σημείο  $F(t)$ .

1. Θέτουμε  $b_{i,0} = b_i$  ( $i = 0, \dots, m$ ).
2. Για  $j = 1, \dots, m$  και  $i = 0, \dots, m - j$ , υπολογίζουμε:

$$b_{i,j} = \frac{s-t}{s-r} b_{i,j-1} + \frac{t-r}{s-r} b_{i+1,j-1}.$$

3. Εξάγουμε το σημείο  $b_{0,m}$ .

*Απόδειξη της ορθότητας του αλγορίθμου.* Ας είναι  $f$  η πολική μορφή της καμπύλης  $F$ . Θα δείξουμε ότι για κάθε  $j = 1, \dots, m$  ισχύει:

$$b_{i,j} = f(\underbrace{t, \dots, t}_j, \underbrace{r, \dots, r}_{m-i-j}, \underbrace{s, \dots, s}_i) \quad (i = 0, \dots, m - j).$$

Έχουμε:

$$\lambda = \frac{t-r}{s-r}.$$

Ας είναι  $j = 1$ . Για  $i = 0, \dots, m - 1$ , ισχύει:

$$\begin{aligned} b_{i,1} &= \frac{s-t}{s-r} b_{i,0} + \frac{t-r}{s-r} b_{i+1,0} \\ &= (1-\lambda) b_i + \lambda b_{i+1} \\ &= (1-\lambda) f(\underbrace{r, \dots, r}_{m-i}, \underbrace{r, \dots, r}_i, s) + \lambda f(\underbrace{r, \dots, r}_{m-i-1}, \underbrace{r, \dots, r}_{i+1}, s) \\ &= f((1-\lambda)r + \lambda s, \underbrace{r, \dots, r}_{m-i-1}, \underbrace{r, \dots, r}_i, s) \\ &= f(\underbrace{t, r, \dots, r}_{m-i-1}, \underbrace{r, s, \dots, s}_i). \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι η ισότητα ισχύει για  $j = k < m$ . Τότε, έχουμε:

$$\begin{aligned}
 b_{i,k+1} &= \frac{s-t}{s-r} b_{i,k} + \frac{t-r}{s-r} b_{i+1,k} \\
 &= (1-\lambda) \underbrace{f(t, \dots, t, r, \dots, r, s, \dots, s)}_k + \lambda \underbrace{f(t, \dots, t, r, \dots, r, s, \dots, s)}_{m-i-k} \\
 &= \underbrace{f(t, \dots, t, (1-\lambda)r + \lambda s, r, \dots, r, s, \dots, s)}_{k+1} \\
 &= \underbrace{f(t, \dots, t, r, \dots, r, s, \dots, s)}_{m-i-k-1} \underbrace{\phantom{f(t, \dots, t, r, \dots, r, s, \dots, s)}}_i.
 \end{aligned}$$

Άρα, η προς απόδειξη ισότητα ισχύει για κάθε  $j = 1, \dots, m$  και επομένως έχουμε  $b_{0,m} = f(t, \dots, t) = F(t)$ .

Ο υπολογισμός του  $b_{0,m} = f(t, \dots, t)$  παρουσιάζεται συνοπτικά παρακάτω:

	0	1	...	$j-1$	$j$	...	$m-1$	$m$
$b_{0,0}$								
		$b_{0,1}$						
$b_{1,0}$			$\ddots$					
				$b_{0,j-1}$				
				$\vdots$	$b_{0,j}$			
				$b_{i,j-1}$				
					$b_{i,j}$			
				$b_{i+1,j-1}$				
				$\vdots$				
							$b_{0,m-1}$	
							$b_{1,m-1}$	$b_{0,m}$
					$b_{m-j,j}$			
				$b_{m-j+1,j-1}$				
			$\ddots$					
$b_{m-1,0}$								
		$b_{m-1,1}$						
$b_{m,0}$								

ΠΙΝΑΚΑΣ 5. Αλγόριθμος του de Casteljau.

Γεωμετρικά, ο αλγόριθμος μπορεί να παρασταθεί με τις εξής  $m$  τεθλασμένες γραμμές:

$$\begin{aligned}
 &(b_{0,0}, b_{1,0}), (b_{1,0}, b_{2,0}), (b_{2,0}, b_{3,0}) \dots, (b_{m-2,0}, b_{m-1,0}), (b_{m-1,0}, b_{m,0}) \\
 &(b_{0,1}, b_{1,1}), (b_{1,1}, b_{2,1}), (b_{2,1}, b_{3,1}), \dots, (b_{m-2,1}, b_{m-1,1}) \\
 &(b_{0,2}, b_{1,2}), (b_{1,2}, b_{2,2}), \dots, (b_{m-3,2}, b_{m-2,2}) \\
 &\dots \dots \dots \\
 &(b_{0,m-2}, b_{1,m-2}), (b_{1,m-2}, b_{2,m-2}) \\
 &(b_{0,m-1}, b_{1,m-1}).
 \end{aligned}$$

**Ορισμός 7.1.** Οι παραπάνω γραμμές μαζί με το σημείο  $b_{0,m}$  σχηματίζουν το *διάγραμμα του de Casteljau* για τον υπολογισμό του  $b_{0,m} = F(t)$ . Η πρώτη γραμμή του διαγράμματος καλείται *πολύγωνο ελέγχου του τμήματος*  $\mathcal{B}_{(r,s)}[b_0, \dots, b_m]([r, s])$ .

## 7.2 Αλγόριθμος Υποδιαίρεσης

Σ' αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε μία αποτελεσματική μέθοδο η οποία μας επιτρέπει να προσεγγίσουμε ένα τμήμα μία πολυωνυμικής καμπύλης με μία πολυγωνική γραμμή αρκετά <<γρήγορα>>. Ας είναι  $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{E}$  η πολυωνυμική καμπύλη πολικού βαθμού  $m$  που ορίζεται από τα σημεία  $b_0, \dots, b_m$  επί του ομοπαράλληλικού πλαισίου  $(r, s)$  και  $f$  η πολική της μορφή. Θεωρούμε το διάγραμμα του de Casteljau για τον υπολογισμό του σημείου  $F(t)$ , όπου  $t \in \mathbb{A}$ , το οποίο παρουσιάσαμε στην προηγούμενη ενότητα.

**Πρόταση 7.1.** Ας είναι  $t \in \mathbb{A}$  με  $r < t < s$ . Τότε, για κάθε  $u \in \mathbb{A}$ , ισχύει:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{(r,s)}[b_0, \dots, b_m](u) &= \mathcal{B}_{(r,t)}[b_{0,0}, \dots, b_{0,j}, \dots, b_{0,m}](u) \\ &= \mathcal{B}_{(t,s)}[b_{0,m}, \dots, b_{m-j,j}, \dots, b_{m,0}](u). \end{aligned}$$

*Απόδειξη.* Ας είναι  $g$  η πολική μορφή της καμπύλης που ορίζεται από τα σημεία  $b_{0,0}, \dots, b_{0,j}, \dots, b_{0,m}$  επί του ομοπαράλληλικού πλαισίου  $(r, t)$ . Για κάθε  $j = 0, \dots, m$ , ισχύει:

$$g(\underbrace{t, \dots, t}_j, \underbrace{r, \dots, r}_{m-j}) = b_{0,j} = f(\underbrace{t, \dots, t}_j, \underbrace{r, \dots, r}_{m-j}).$$

Καθώς είδαμε στην Ενότητα 6.1, οι απεικονίσεις  $f$  και  $g$  ορίζονται πλήρως από τις παραπάνω τιμές τους και κατά συνέπεια έπεται ότι  $f = g$ . Επομένως, για κάθε  $u \in \mathbb{A}$ , έχουμε:

$$\mathcal{B}_{(r,s)}[b_0, \dots, b_m](u) = \mathcal{B}_{(r,t)}[b_{0,0}, \dots, b_{0,j}, \dots, b_{0,m}](u).$$

Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε πως ισχύει και η δεύτερη ισότητα. □

**Ορισμός 7.2.** Για κάθε  $t \in [r, s]$ , τα τμήματα της καμπύλης  $F$ ,

$$\mathcal{B}_{(r,t)}[b_{0,0}, \dots, b_{0,j}, \dots, b_{0,m}]([r, t]), \quad \mathcal{B}_{(t,s)}[b_{0,m}, \dots, b_{m-j,j}, \dots, b_{m,0}]([t, s]),$$

καλούνται μία *υποδιαίρεση* του τμήματος  $\mathcal{B}_{(r,s)}[b_0, \dots, b_m]([r, s])$  που αντιστοιχεί στην τιμή  $t$ .

Η υποδιαίρεση ενός τμήματος καμπύλης που είδαμε παραπάνω μπορεί να επαναληφθεί αναδρομικά για καθένα από τα δύο τμήματα στα οποία διαιρέθηκε το αρχικό τμήμα. Τα διαδοχικά σημεία ελέγχου τα οποία θα προκύψουν δίνουν μία πολυγωνική γραμμή η οποία συγκλίνει γρήγορα στο αρχικό τμήμα. Στη συνέχεια θα δούμε πιο συστηματικά αυτή τη διαδικασία.

Θα υποθέσουμε στη συνέχεια πιο απλά ότι  $r = 0$  και  $s = 1$ .

**Αλγόριθμος 7.2.** Αλγόριθμος Υποδιαίρεσης.

*Είσοδος:* Το τμήμα καμπύλης  $\mathcal{B}_{(0,1)}[b_0, \dots, b_m]([0, 1])$  και ένας φυσικός  $n$ .

*Έξοδος:* Μία πολυγωνική γραμμή  $\Pi_n$  η οποία είναι ένωση  $2^n$  πολυγώνων ελέγχου ισαρίθμων τμημάτων του Bézier του  $\mathcal{B}_{(0,1)}[b_0, \dots, b_m]([0, 1])$  των οποίων τα ακραία σημεία ανήκουν στην καμπύλη  $F$ .

- Υπολογίζουμε το σημείο  $b_{0,m} = F(1/2)$  και θεωρούμε την υποδιαίρεση του τμήματος  $\mathcal{B}_{(0,1)}[b_0, \dots, b_m]([0, 1])$  η οποία αποτελείται από τα τμήματα

$$\mathcal{B}_{(0,1/2)}[b_{0,0}, \dots, b_{0,j}, \dots, b_{0,m}]([0, 1/2])$$

και

$$\mathcal{B}_{(1/2,1)}[b_{0,m}, \dots, b_{m-j,j}, \dots, b_{m,0}]([1/2, 1]).$$



2. Υπολογίζουμε τα σημεία  $F(1/4)$ ,  $F(3/4)$  και στη συνέχεια θεωρούμε τις υποδιαίρεσεις των τμημάτων  $\mathcal{B}_{(0,1/2)}[b_{0,0}, \dots, b_{0,j}, \dots, b_{0,m}][[0, 1/2]]$  και  $\mathcal{B}_{(1/2,1)}[b_{0,m}, \dots, b_{m-j,j}, \dots, b_{m,0}][[1/2, 1]]$  οι οποίες αντιστοιχούν στις τιμές  $t = 1/4, 3/4$ .
3. Συνεχίζουμε αυτή τη διαδικασία και στο  $n$ -οστό βήμα έχουμε υπολογίσει  $2^n$  τμήματα του Βέζιερ των οποίων τα ακραία σημεία είναι τα σημεία  $F(k/2^n)$  ( $k = 0, \dots, 2^n$ ) της καμπύλης  $F$ . Έτσι, έχουμε κατασκευάσει  $2^n$  πολύγωνα ελέγχου των οποίων η ένωση σχηματίζει ένα πολύγωνο  $\Pi_n$  με  $m2^n + 1$  κορυφές.
4. Εξάγουμε το πολύγωνο  $\Pi_n$ .

Πιο συγκεκριμένα, αν το τμήμα  $\mathcal{B}_{(0,1)}[b_0, \dots, b_m][[0, 1]]$  της  $F$  είναι ένωση των τμημάτων

$$\mathcal{B}_{(i/2^n, (i+1)/2^n)}[a_{i,0}, \dots, a_{i,m}][[i/2^n, (i+1)/2^n]] \quad (i = 0, \dots, 2^n - 1)$$

με αυτή τη σειρά, τότε το  $\Pi_n$  είναι συνένωση των αντίστοιχων πολυγώνων ελέγχου  $P_i$  ( $i = 0, \dots, 2^n - 1$ ) τα οποία ορίζονται από τις σχέσεις:

$$P_i(u) = (im + j + 1 - m2^nu)a_{i,j} + (m2^nu - im - j)a_{i,j+1},$$

με  $u \in \Delta_{i,j}$ , όπου

$$\Delta_{i,j} = \left[ \frac{i}{2^n} + \frac{j}{m2^n}, \frac{i}{2^n} + \frac{j+1}{m2^n} \right] \quad (j = 0, \dots, m-1).$$

Υπενθυμίζουμε ότι καλούμε μήκος ενός διανύσματος  $x = (x_1, \dots, x_n)$  του  $\mathbb{R}^n$  την ποσότητα

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Βασικές ιδιότητες του μέτρου ενός διανύσματος δίνονται παρακάτω:

- (α)  $0 \leq \|x\| < \infty$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}^n$ ,
- (β)  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ,
- (γ)  $\|ax\| = |a|\|x\|$ , για κάθε  $a \in \mathbb{R}$  και  $x \in \mathbb{R}^n$ ,
- (δ)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ , για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}^n$  (τριγωνική ανισότητα).

**Πρόταση 7.2.** *Ας υποθέσουμε ότι  $\mathcal{E} = \mathbb{A}^q$ . Τότε, ισχύει:*

$$\max_{0 \leq u \leq 1} \|\overrightarrow{\Pi_n(u)F(u)}\| \leq \frac{C}{2^n},$$

όπου  $C$  είναι μία σταθερά ανεξάρτητη από τον  $n$ .

*Απόδειξη.* Θεωρούμε τα τμήματα  $\mathcal{B}_{(0,1/2)}[b_{0,0}, \dots, b_{0,j}, \dots, b_{0,m}][[0, 1/2]]$  και  $\mathcal{B}_{(1/2,1)}[b_{0,m}, \dots, b_{m-j,j}, \dots, b_{m,0}][[1/2, 1]]$  του  $\mathcal{B}_{(0,1)}[b_0, \dots, b_m][[0, 1]]$ . Θέτουμε:

$$M = \max_{j \in \{1, \dots, m\}} \|\overrightarrow{b_{j-1,0}b_{j,0}}\|.$$

Θα δείξουμε ότι για  $j = 1, \dots, m$  ισχύει:

$$\|\overrightarrow{b_{0,j-1}b_{0,j}}\| \leq M \quad \text{και} \quad \|\overrightarrow{b_{m-j,j}b_{m-j+1,j-1}}\| \leq M.$$

Για τον σκοπό αυτό θα δείξουμε πρώτα, χρησιμοποιώντας επαγωγή, ότι ισχύει:

$$\|\overrightarrow{b_{i,k}b_{i+1,k}}\| \leq M \quad (k = 0, \dots, m-1, i = 0, \dots, m-k).$$

Για  $k = 0$  προφανώς ισχύει. Υποθέτουμε ότι ισχύει για  $k = l$ , δηλαδή έχουμε:

$$\|\overrightarrow{b_{i,l}b_{i+1,l}}\| \leq M \quad (i = 0, \dots, m-l).$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει για  $k = l+1$ . Από τις σχέσεις

$$b_{i,l+1} = \frac{1}{2}b_{i,l} + \frac{1}{2}b_{i+1,l} \quad \text{και} \quad b_{i+1,l+1} = \frac{1}{2}b_{i+1,l} + \frac{1}{2}b_{i+2,l},$$

παίρνουμε:

$$\overrightarrow{b_{i,l+1}b_{i,l}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{b_{i+1,l}b_{i,l}} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{b_{i+1,l}b_{i+1,l+1}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{b_{i+1,l}b_{i+2,l}}.$$

Επομένως, ισχύει:

$$\overrightarrow{b_{i,l+1}b_{i+1,l+1}} = \overrightarrow{b_{i,l+1}b_{i+1,l}} + \overrightarrow{b_{i+1,l}b_{i+1,l+1}} = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{b_{i+1,l}b_{i,l}} + \overrightarrow{b_{i+1,l}b_{i+2,l}}).$$

Έτσι, από την υπόθεση της επαγωγής προκύπτει:

$$\|\overrightarrow{b_{i,l+1}b_{i+1,l+1}}\| \leq M.$$

Για κάθε  $j = 0, \dots, m-1$  έχουμε:

$$b_{0,j+1} = \frac{1}{2}b_{0,j} + \frac{1}{2}b_{1,j} \quad \text{και} \quad b_{m-j,j} = \frac{1}{2}b_{m-j,j-1} + \frac{1}{2}b_{m-j+1,j-1}.$$

Επομένως, ισχύει:

$$\overrightarrow{b_{0,j}b_{0,j+1}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{b_{0,j}b_{1,j}} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{b_{m-j,j}b_{m-j+1,j-1}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{b_{m-j,j-1}b_{m-j+1,j-1}}.$$

Συνδυάζοντας αυτές τις σχέσεις με τις παραπάνω ανισότητες, παίρνουμε:

$$\|\overrightarrow{b_{0,j-1}b_{0,j}}\| \leq \frac{M}{2}, \quad \|\overrightarrow{b_{m-j+1,j-1}b_{m-j,j}}\| \leq \frac{M}{2} \quad (j = 1, \dots, m).$$

Επομένως, οι πλευρές του πολυγώνου  $\Pi_n$  έχουν μήκος  $\leq M/2^n$ .

Ας υποθέσουμε ότι το τμήμα  $\mathcal{B}_{(0,1)}[b_0, \dots, b_m]([0,1])$  της  $F$  είναι ένωση των τμημάτων

$$\mathcal{B}_{(i/2^n, (i+1)/2^n)}[a_{i,0}, \dots, a_{i,m}]([i/2^n, (i+1)/2^n]) \quad (i = 0, \dots, 2^n - 1)$$

με αυτή τη σειρά. Έτσι, το  $\Pi_n$  είναι συνένωση των αντίστοιχων πολυγώνων ελέγχου  $P_i$  ( $i = 0, \dots, 2^n - 1$ ) τα οποία ορίζονται από τις σχέσεις:

$$P_i(u) = (im + j + 1 - m2^n u)a_{i,j} + (m2^n u - im - j)a_{i,j+1},$$

με  $u \in \Delta_{i,j}$ , όπου

$$\Delta_{i,j} = \left[ \frac{i}{2^n} + \frac{j}{m2^n}, \frac{i}{2^n} + \frac{j+1}{m2^n} \right] \quad (j = 0, \dots, m-1).$$

Ας είναι  $u \in [0,1]$ . Τότε υπάρχουν ακέραιοι  $i \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$  και  $j \in \{0, \dots, m-1\}$  έτσι, ώστε  $u \in \Delta_{i,j}$ . Το τμήμα  $F([i/2^n, (i+1)/2^n])$  είναι υποσύνολο του κυρτού καλύμματος των  $a_{i,0}, \dots, a_{i,m}$ . Οπότε, υπάρχουν  $\lambda_0, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  με  $\lambda_0 + \dots + \lambda_m = 1$  και  $\lambda_i \geq 0$  ( $i = 0, \dots, m$ ) έτσι, ώστε

$$F(u) = \lambda_0 a_{i,0} + \dots + \lambda_m a_{i,m}.$$

Καθώς ισχύει:

$$F(u) = P_i(u) + \sum_{l=0}^m \lambda_l \overrightarrow{P_i(u) a_{i,l}},$$

παίρνουμε:

$$\overrightarrow{P_i(u) F(u)} = \sum_{l=0}^m \lambda_l \overrightarrow{P_i(u) a_{i,l}}.$$

Από την άλλη πλευρά, για  $l = 0, \dots, m$ , έχουμε:

$$P_i(u) = a_{i,l} + (im + j + 1 - m2^n u) \overrightarrow{a_{i,l} a_{i,j}} + (m2^n u - im - j) \overrightarrow{a_{i,l} a_{i,j+1}}.$$

Επομένως ισχύει:

$$a_{i,l} \overrightarrow{P_i(u)} = (im + j + 1 - m2^n u) \overrightarrow{a_{i,l} a_{i,j}} + (m2^n u - im - j) \overrightarrow{a_{i,l} a_{i,j+1}}.$$

Έτσι, έχουμε:

$$\overrightarrow{F(u) P_i(u)} = - \sum_{l=0}^m \lambda_l ((im + j + 1 - m2^n u) \overrightarrow{a_{i,l} a_{i,j}} + (m2^n u - im - j) \overrightarrow{a_{i,l} a_{i,j+1}}).$$

Από την τριγωνική ιδιότητα παίρνουμε:

$$\|\overrightarrow{F(u) \Pi_n(u)}\| \leq \sum_{l=0}^m \lambda_l \max_{0 \leq s, t \leq m} \|\overrightarrow{a_{i,s} a_{i,t}}\| = \max_{0 \leq s, t \leq m} \|\overrightarrow{a_{i,s} a_{i,t}}\|.$$

Οπότε, προκύπτει:

$$\|\overrightarrow{F(u) \Pi_n(u)}\| \leq m \max_{0 \leq s \leq m-1} \|\overrightarrow{a_{i,s} a_{i,s+1}}\| \leq \frac{mM}{2^n}.$$

□

Σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση, για αρκετά μεγάλο  $n$ , το πολύγωνο  $\Pi_n$  προσεγγίζει πάρα πολύ το τμήμα  $\mathcal{B}_{(0,1)}[b_0, \dots, b_m]([0, 1])$  της καμπύλης  $F$  ώστε να είναι δυσδιάκριτο από αυτό. Έτσι, μία γρήγορη μέθοδος απεικόνισης του τμήματος  $\mathcal{B}_{(0,1)}[b_0, \dots, b_m]([0, 1])$  της καμπύλης  $F$  στην οθόνη ενός υπολογιστή δίνεται από την κατασκευή του  $\Pi_n$ .

Μία άλλη εφαρμογή της μεθόδου υποδιαίρεσης είναι ο υπολογισμός του πολυγώνου ελέγχου της καμπύλης  $F$  ως προς ένα άλλο ομοπαράλληλο πλαίσιο  $[a, b] \subseteq [r, s]$  χρησιμοποιώντας τα σημεία ελέγχου  $b_0, \dots, b_m$ . Πράγματι, αν  $a \neq r$ , τότε κατασκευάζουμε την υποδιαίρεση του  $\mathcal{B}_{(r,s)}[b_0, \dots, b_m]([r, s])$  που αντιστοιχεί στη τιμή  $a$ , δηλαδή τα τμήματα  $\mathcal{B}_{(r,a)}[b_{0,0}, \dots, b_{0,j}, \dots, b_{0,m}]([r, a])$  και  $\mathcal{B}_{(a,s)}[b_{0,m}, \dots, b_{m-j,j}, \dots, b_{m,0}]([a, s])$ . Κατόπιν, κατασκευάζουμε την υποδιαίρεση του  $\mathcal{B}_{(a,s)}[b_{0,m}, \dots, b_{m-j,j}, \dots, b_{m,0}]([a, s])$  που αντιστοιχεί στο  $b$ . Το τμήμα που αντιστοιχεί στο διάστημα  $[a, b]$  δίνει το ζητούμενο πολύγωνο ελέγχου.

### 7.3 Αλγόριθμος του de Boor

Σ' αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε μία εκδοχή του αλγορίθμου του de Casteljau η οποία χρησιμοποιεί διαφορετικά σημεία ελέγχου.

**Ορισμός 7.3.** Μία ακολουθία πραγματικών αριθμών  $u_1, \dots, u_{2m}$  καλείται *προοδευτική*, αν ισχύει  $u_j \neq u_{i+m}$ , για κάθε  $j$  και  $i$  με  $1 \leq i \leq j \leq m$ .

Η ιδιότητα αυτή δίνεται εποπτικά από το κάτω τριγωνικό κομμάτι του παρακάτω πίνακα:

$u_1$	$\neq$							
$u_2$	$\neq$	$\neq$						
$u_3$	$\neq$	$\neq$	$\neq$					
...	...	...	...					
$u_{m-1}$	$\neq$	$\neq$	$\neq$	...	$\neq$	...	$\neq$	
$u_m$	$\neq$	$\neq$	$\neq$	...	$\neq$	...	$\neq$	$\neq$
	$u_{m+1}$	$u_{m+2}$	$u_{m+3}$	...	$u_{2m-j+1}$	...	$u_{2m-1}$	$u_{2m}$

ΠΙΝΑΚΑΣ 6. Μία προοδευτική ακολουθία.

**Παράδειγμα 7.3.** Ας είναι  $m = 2$ . Η ακολουθία  $u_1, u_2, u_3, u_4$  είναι προοδευτική αν και μόνον αν  $u_1 \neq u_3$ ,  $u_2 \neq u_3$ ,  $u_2 \neq u_4$ . Δύο τέτοιες ακολουθίες είναι οι 2, 3, 4, 5 και 4, 4, 5, 7.

**Παράδειγμα 7.4.** Για  $m = 3$ , η ακολουθία  $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$  είναι προοδευτική αν και μόνον αν  $u_1 \neq u_4$ ,  $u_2 \neq u_4$ ,  $u_2 \neq u_5$ ,  $u_3 \neq u_4$ ,  $u_3 \neq u_5$  και  $u_3 \neq u_6$ . Τέτοια παραδείγματα αποτελούν οι ακολουθίες 4, 5, 6, 7, 8, 9 και 4, 4,  $\sqrt{2}$ , 10, 11, 12.

Ο αλγόριθμος του de Boor υπολογίζει τις τιμές της πολικής μορφής  $f(t_1, \dots, t_m)$  όπως και ο αλγόριθμος του de Casteljau, χρησιμοποιώντας όμως ως σημεία ελέγχου τα σημεία που προκύπτουν από μία προοδευτική ακολουθία.

Αρχικά θεωρούμε τις περιπτώσεις  $m = 2, 3$ . Ας είναι  $u_1, u_2, u_3, u_4$  μία προοδευτική ακολουθία. Καθώς  $u_1 \neq u_3$ , η τιμή  $f(t_1, u_2)$  υπολογίζεται από τις τιμές  $f(u_1, u_2)$  και  $f(u_2, u_3)$ . Ομοίως, επειδή  $u_2 \neq u_4$ , η τιμή  $f(t_1, u_3)$  υπολογίζεται από τις τιμές  $f(u_2, u_3)$  και  $f(u_3, u_4)$ . Τέλος, καθώς  $u_2 \neq u_3$ , η τιμή  $f(t_1, t_2)$  υπολογίζεται από τις τιμές  $f(t_1, u_2)$  και  $f(t_1, u_3)$ . Ο υπολογισμός αυτός δίνεται εποπτικά στον παρακάτω πίνακα.

	1	2
$f(u_1, u_2)$		
	$f(t_1, u_2)$	
$f(u_2, u_3)$		$f(t_1, t_2)$
	$f(t_1, u_3)$	
$f(u_3, u_4)$		

ΠΙΝΑΚΑΣ 7. Υπολογισμός της τιμής  $f(t_1, t_2)$  με τον αλγόριθμο του de Boor.

Ας είναι  $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$  μία προοδευτική ακολουθία. Στον επόμενο πίνακα δείχνουμε τον υπολογισμό της τιμής  $f(t_1, t_2, t_3)$ . Ας σημειωθεί ότι το πρώτο βήμα είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί γιατί  $u_1 \neq u_4$ ,  $u_2 \neq u_5$ ,  $u_3 \neq u_6$ , το δεύτερο γιατί  $u_2 \neq u_4$ ,  $u_3 \neq u_5$  και το τρίτο γιατί  $u_3 \neq u_4$ .

	1	2	3
$f(u_1, u_2, u_3)$			
	$f(t_1, u_2, u_3)$		
$f(u_2, u_3, u_4)$		$f(t_1, t_2, u_3)$	
	$f(t_1, u_3, u_4)$		$f(t_1, t_2, t_3)$
$f(u_3, u_4, u_5)$		$f(t_1, t_2, u_4)$	
	$f(t_1, u_4, u_5)$		
$f(u_4, u_5, u_6)$			

ΠΙΝΑΚΑΣ 8. Υπολογισμός της τιμής  $f(t_1, t_2, t_3)$  με τον αλγόριθμο του de Boor.

Ας θεωρήσουμε τώρα τη γενική περίπτωση.

**Αλγόριθμος 7.3.** Αλγόριθμος του de Boor.

**Είσοδος:** Μία προοδευτική ακολουθία  $u_1, \dots, u_{2m}$ ,  $m + 1$  σημεία  $b_{i,0} = f(u_{i+1}, \dots, u_{m+i})$  ( $i = 0, \dots, m$ ), όπου  $f : \mathbb{A}^m \rightarrow \mathcal{E}$  είναι μία συμμετρική πολυμομοπαράλληλη απεικόνιση και  $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{A}$ .

**Έξοδος:** Το σημείο  $f(t_1, \dots, t_m)$ .

1. Για  $j = 1, \dots, m$  και  $i = 0, \dots, m - j$ , υπολογίζουμε:

$$b_{i,j} = \frac{u_{m+i+1} - t_j}{u_{m+i+1} - u_{i+j}} b_{i,j-1} + \frac{t_j - u_{i+j}}{u_{m+i+1} - u_{i+j}} b_{i+1,j-1}.$$

2. Εξάγουμε το σημείο  $b_{0,m}$ .

Απόδειξη της ορθότητας του αλγορίθμου. Καθώς η ακολουθία  $u_1, \dots, u_{2m}$  είναι προοδευτική, έχουμε  $u_j \neq u_{i+m}$ , για κάθε  $j = 1, \dots, m$  και  $i = 1, \dots, j$ . Αντικαθιστώντας το  $j$  με  $i + j$ , η προηγούμενη ανισότητα δίνει  $u_{m+i+1} \neq u_{i+j}$ . Επομένως, για κάθε  $j = 1, \dots, m$  ισχύει:

$$t_j = \frac{u_{m+i+1} - t_j}{u_{m+i+1} - u_{i+j}} u_{i+j} + \frac{t_j - u_{i+j}}{u_{m+i+1} - u_{i+j}} u_{m+i+1}.$$

Στη συνέχεια αποδεικνύεται με επαγωγή (όπως και στην απόδειξη της ορθότητας του αλγορίθμου του de Casteljau) ότι ισχύει:

$$b_{i,j} = f(t_1, \dots, t_j, u_{i+j+1}, \dots, u_{m+i}) \quad (i = 1, \dots, m - j).$$

Από αυτή την ισότητα προκύπτει αμέσως ότι  $f(t_1, \dots, t_m) = b_{0,m}$ .

Παραθέτουμε παρακάτω έναν πίνακα που δείχνει τα σημεία που παίρνουμε στο  $j - 1$ -οστό και  $j$ -οστό βήμα του αλγορίθμου:

$j - 1$	$j$
$f(t_1, \dots, t_{j-1}, u_j, \dots, u_m)$	$f(t_1, \dots, t_j, u_{j+1}, \dots, u_m)$
$f(t_1, \dots, t_{j-1}, u_{j+1}, \dots, u_{m+1})$	...
...	...
$f(t_1, \dots, t_{j-1}, u_{i+j}, \dots, u_{m+i})$	$f(t_1, \dots, t_j, u_{i+j+1}, \dots, u_{m+i})$
$f(t_1, \dots, t_{j-1}, u_{i+j+1}, \dots, u_{m+i+1})$	...
...	...
$f(t_1, \dots, t_{j-1}, u_m, \dots, u_{2m-j})$	$f(t_1, \dots, t_j, u_{m+1}, \dots, u_{2m-j})$
$f(t_1, \dots, t_{j-1}, u_{m+1}, \dots, u_{2m-j+1})$	

ΠΙΝΑΚΑΣ 9. Το  $j - 1$ -οστό και  $j$ -οστό βήμα του αλγορίθμου του de Boor.

**Παράδειγμα 7.5.** Θεωρούμε την προοδευτική ακολουθία

$$u_1 = 4, \quad u_2 = 4, \quad u_3 = 3, \quad u_4 = 7, \quad u_5 = 8, \quad u_6 = 9$$

και τις τιμές

$$b_{0,0} = f(u_1, u_2, u_3) = (40, 49, 11), \quad b_{1,0} = f(u_2, u_3, u_4) = (52, 85, 14),$$

$$b_{2,0} = f(u_3, u_4, u_5) = (101, 169, 18), \quad b_{3,0} = f(u_4, u_5, u_6) = (191, 505, 24),$$

μίας συμμετρικής 3-ομοπαραλληλικής απεικόνισης  $f : \mathbb{A}^3 \rightarrow \mathbb{A}^3$ . Θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο του de Boor για να προσδιορίσουμε το σημείο  $f(1, 4, 0)$ . Υπολογίζουμε:

$$b_{0,1} = \frac{u_4 - 1}{u_4 - u_1} b_{0,0} + \frac{1 - u_1}{u_4 - u_1} b_{1,0} = (28, 13, 8),$$

$$\begin{aligned}
b_{1,1} &= \frac{u_5 - 1}{u_5 - u_2} b_{1,0} + \frac{1 - u_2}{u_5 - u_2} b_{2,0} = \left(\frac{61}{4}, 22, 11\right), \\
b_{2,1} &= \frac{u_6 - 1}{u_6 - u_3} b_{2,0} + \frac{1 - u_3}{u_6 - u_3} b_{3,0} = (71, 57, 16), \\
b_{0,2} &= \frac{u_4 - 4}{u_4 - u_2} b_{0,1} + \frac{4 - u_2}{u_4 - u_2} b_{1,1} = (28, 13, 8), \\
b_{1,2} &= \frac{u_5 - 4}{u_5 - u_3} b_{1,1} + \frac{4 - u_3}{u_5 - u_3} b_{2,1} = \left(\frac{132}{5}, 29, 12\right), \\
b_{0,3} &= \frac{u_4}{u_4 - u_3} b_{0,2} + \frac{-u_3}{u_4 - u_3} b_{1,2} = \left(\frac{146}{5}, 1, 5\right).
\end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε:

$$f(1, 4, 0) = \left(\frac{146}{5}, 1, 5\right).$$

Στη συνέχεια θα δώσουμε ένα θεώρημα ανάλογο με το 6.1

**Θεώρημα 7.1.** *Ας είναι  $(u_1, \dots, u_{2m})$  μία προοδευτική ακολουθία. Τότε, για κάθε  $m + 1$  σημεία  $b_0, \dots, b_m$  ενός ομοπαράλληλικού χώρου  $\mathcal{E}$ , υπάρχει μία μοναδική συμμετρική  $m$ -ομοπαράλληλική απεικόνιση  $f : \mathbb{A}^m \rightarrow \mathcal{E}$  η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:*

$$f(u_{k+1}, \dots, u_{m+k}) = b_k \quad (k = 0, \dots, m).$$

*Απόδειξη.* Ας είναι  $f : \mathbb{A}^m \rightarrow \mathcal{E}$  μία συμμετρική πολυομοπαράλληλική απεικόνιση με την παραπάνω ιδιότητα. Για  $j = 1, \dots, m$  και  $i = 0, \dots, m - j$  θέτουμε:

$$b_{i,j} = f(t_1, \dots, t_j, u_{i+j+1}, \dots, u_{m+i}).$$

Επίσης, για  $i = 0, \dots, m$ , θέτουμε:

$$b_{i,0} = f(u_{i+1}, \dots, u_{m+i}).$$

Έτσι, εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του de Boor, υπολογίζουμε τα σημεία

$$b_{i,j} = \frac{u_{m+i+1} - t_j}{u_{m+i+1} - u_{i+j}} b_{i,j-1} + \frac{t_j - u_{i+j}}{u_{m+i+1} - u_{i+j}} b_{i+1,j-1},$$

και τελικά παίρνουμε το σημείο  $b_{0,m} = f(t_1, \dots, t_m)$ . Παρατηρούμε ότι οι υπολογισμοί εξαρτώνται μόνον από τα σημεία  $b_0, \dots, b_m$  και την προοδευτική ακολουθία  $(u_1, \dots, u_{2m})$ . Επομένως, η  $f$  είναι μοναδική.

Ας είναι  $(a_0, \dots, a_n)$  ένα ομοπαράλληλικό πλαίσιο του  $\mathcal{E}$  και ας θέσουμε  $\vec{e}_i = a_0 \vec{a}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Θεωρούμε τις απεικονίσεις  $f_j : \mathbb{A}^m \rightarrow \mathbb{R}$  ( $j = 1, \dots, n$ ) με

$$f_j(t_1, \dots, t_m) = \sum_{l=0}^m c_{j,l} \sigma_l(t_1, \dots, t_m),$$

όπου  $c_{j,l} \in \mathbb{R}$  και  $\sigma_l(t_1, \dots, t_m)$  είναι οι στοιχειώδεις συμμετρικές απεικονίσεις (βλέπε Παράδειγμα 5.1), και κατόπιν, την απεικόνιση  $f : \mathbb{A}^m \rightarrow \mathcal{E}$  με

$$f(t_1, \dots, t_m) = a_0 + f_1(t_1, \dots, t_m) \vec{e}_1 + \dots + f_n(t_1, \dots, t_m) \vec{e}_n.$$

Η απεικόνιση  $f$  είναι εξ' ορισμού της συμμετρική και όπως εύκολα διαπιστώνουμε είναι πολυομοπαράλληλική. Στη συνέχεια, γράφουμε:

$$b_k = a_0 + b_{k,1} \vec{e}_1 + \dots + b_{k,n} \vec{e}_n \quad (k = 0, \dots, m).$$

Έχουμε:

$$f(u_{k+1}, \dots, u_{m+k}) = b_k \quad (k = 0, \dots, m),$$

αν και μόνον αν, για κάθε  $j = 1, \dots, n$  ισχύει:

$$f_j(u_{k+1}, \dots, u_{k+m}) = b_{kj} \quad (k = 0, \dots, m),$$

δηλαδή, αν και μόνον αν, για κάθε  $j = 1, \dots, n$  ισχύει:

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^m c_{j,l} \sigma_l(u_1, \dots, u_m) &= b_{0,j} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \sum_{l=0}^m c_{j,l} \sigma_l(u_{m+1}, \dots, u_{2m}) &= b_{m,j}. \end{aligned}$$

Όπως δείξαμε παραπάνω, μία τέτοια απεικόνιση  $f$  αν υπάρχει, τότε είναι μοναδική. Δηλαδή, αν όλα τα  $n$  παραπάνω συστήματα (με αγνώστους τα  $c_{j,l}$  ( $l = 1, \dots, m$ )) έχουν λύση, τότε αυτή είναι μοναδική. Επιλέγοντας  $b_{0,j} = \dots = b_{m,j} = 0$ , έχουμε ότι το αντίστοιχο σύστημα έχει μόνο τη μηδενική λύση. Τότε, ο πίνακας του συστήματος

$$M = \begin{pmatrix} \sigma_0(u_1, \dots, u_m) & \dots & \sigma_m(u_1, \dots, u_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_0(u_{m+1}, \dots, u_{2m}) & \dots & \sigma_m(u_{m+1}, \dots, u_{2m}) \end{pmatrix}$$

έχει τις στήλες του γραμμικώς ανεξάρτητες. Καθώς ο  $M$  είναι ένας τετράγωνος  $(m+1) \times (m+1)$ -πίνακας, είναι αντιστρέψιμος και επομένως για κάθε επιλογή των  $b_{0,j}, \dots, b_{m,j}$  το αντίστοιχο γραμμικό σύστημα έχει λύση. Συνεπώς, υπάρχει η απεικόνιση  $f$  με την επιθυμητή ιδιότητα.  $\square$

**Παράδειγμα 7.6.** Θεωρούμε την προοδευτική ακολουθία  $u_1 = 2, u_2 = 2, u_3 = 3, u_4 = 5, u_5 = 6, u_6 = 7$  και τα σημεία του  $\mathbb{A}^2$ ,  $b_0 = (1, 1), b_1 = (-1, 0), b_2 = (0, 1), b_3 = (2, 1)$ . Θα προσδιορίσουμε τη μοναδική συμμετρική 3-ομοπαράλληλική απεικόνιση  $f: \mathbb{A}^3 \rightarrow \mathbb{A}^2$  η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(u_{k+1}, u_{k+2}, u_{k+3}) = b_k \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Θεωρούμε τις απεικονίσεις  $f_j: \mathbb{A}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  ( $j = 1, 2$ ) με

$$f_j(t_1, t_2, t_3) = \sum_{l=0}^3 c_{j,l} \sigma_l(t_1, t_2, t_3),$$

όπου  $c_{j,l} \in \mathbb{R}$  και  $\sigma_l(t_1, t_2, t_3)$  ( $l = 0, 1, 2, 3$ ) είναι οι στοιχειώδεις συμμετρικές απεικονίσεις με τρεις μεταβλητές, δηλαδή

$$\sigma_0(t_1, t_2, t_3) = 1, \quad \sigma_1(t_1, t_2, t_3) = t_1 + t_2 + t_3,$$

$$\sigma_2(t_1, t_2, t_3) = t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3, \quad \sigma_3(t_1, t_2, t_3) = t_1 t_2 t_3.$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε τη συμμετρική και 3-ομοπαράλληλική απεικόνιση  $f: \mathbb{A}^3 \rightarrow \mathbb{A}^2$  με

$$f(t_1, t_2, t_3) = (f_1(t_1, t_2, t_3), f_2(t_1, t_2, t_3)).$$

Θέτουμε  $b_k = (b_{k,1}, b_{k,2})$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ). Έχουμε  $f(u_{k+1}, u_{k+2}, u_{k+3}) = b_k$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) αν και μόνον αν για  $j = 1, 2$  οι αριθμοί  $c_{j,l}$  ( $l = 0, 1, 2, 3$ ) είναι λύση του γραμμικού συστήματος:

$$\sum_{l=0}^3 c_{j,l} \sigma_l(u_{k+1}, u_{k+2}, u_{k+3}) = b_{k,j} \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Πιο συγκεκριμένα έχουμε τα γραμμικά συστήματα:

$$\begin{aligned}c_{1,0} + 7c_{1,1} + 16c_{1,2} + 12c_{1,3} &= 1 \\c_{1,0} + 10c_{1,1} + 31c_{1,2} + 30c_{1,3} &= -1 \\c_{1,0} + 14c_{1,1} + 63c_{1,2} + 90c_{1,3} &= 0 \\c_{1,0} + 18c_{1,1} + 107c_{1,2} + 210c_{1,3} &= 2\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}c_{2,0} + 7c_{2,1} + 16c_{2,2} + 12c_{2,3} &= 1 \\c_{2,0} + 10c_{2,1} + 31c_{2,2} + 30c_{2,3} &= 0 \\c_{2,0} + 14c_{2,1} + 63c_{2,2} + 90c_{2,3} &= 1 \\c_{2,0} + 18c_{2,1} + 107c_{2,2} + 210c_{2,3} &= 1.\end{aligned}$$

Η λύση των δύο συστημάτων, αντίστοιχα, είναι:

$$(c_{1,0}, c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3}) = (27/12, -135/68, 19/68, -2/153)$$

και

$$(c_{2,0}, c_{2,1}, c_{2,2}, c_{2,3}) = (71/12, -71/68, 11/68, -5/306).$$

Επομένως, η ζητούμενη συμμετρική 3-ομοπαράλληλη απεικόνιση είναι:

$$f(t_1, t_2, t_3) = (f_1(t_1, t_2, t_3), f_2(t_1, t_2, t_3)),$$

όπου

$$f_1(t_1, t_2, t_3) = \frac{27}{12} - \frac{135}{68}(t_1 + t_2 + t_3) + \frac{19}{68}(t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3) - \frac{2}{153}t_1t_2t_3$$

και

$$f_2(t_1, t_2, t_3) = \frac{71}{12} - \frac{71}{68}(t_1 + t_2 + t_3) + \frac{11}{68}(t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3) - \frac{5}{306}t_1t_2t_3.$$

#### 7.4 Παράγωγος Καμπύλης

Ας είναι  $a \in \mathbb{R}$ . Σε αυτή και την επόμενη ενότητα θα συμβολίζουμε ένα σημείο του  $\mathbb{A}$  με  $\bar{a}$  για να το διακρίνουμε από το διάνυσμα  $a$ . Επίσης, θα συμβολίζουμε με  $\vec{1}$  το διάνυσμα  $1 \in \mathbb{R}$ . Θεωρούμε  $\bar{a} \in \mathbb{A}$  και μία πολυωνυμική καμπύλη  $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^n$  ( $n \geq 2$ ).

**Ορισμός 7.4.** Καλούμε παράγωγο της  $F$  στο  $\bar{a}$  το όριο

$$DF(\bar{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(\bar{a} + t\vec{1}) - F(\bar{a})}{t},$$

αν υπάρχει.

Ας σημειωθεί ότι η παράγωγος  $DF(\bar{a})$  είναι ένα διάνυσμα του  $\mathbb{R}^n$  και όχι ένα σημείο του  $\mathbb{A}^n$ . Ας είναι  $O = (0, \dots, 0) \in \mathbb{A}^n$ . Θεωρούμε τη μορφή Bézier της  $F$ :

$$F(t) = \sum_{k=0}^m B_k^m[r, s](t) b_k.$$



Τότε, έχουμε:

$$F(t) = O + \sum_{k=0}^m B_k^m[r, s](t) \overrightarrow{Ob}_k.$$

Επομένως, ισχύει:

$$\begin{aligned} DF(\bar{a}) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(\bar{a} + t\vec{1}) - F(\bar{a})}{t} \\ &= \sum_{k=0}^m \lim_{t \rightarrow 0} \frac{B_k^m[r, s](\bar{a} + t\vec{1}) - B_k^m[r, s](\bar{a})}{t} \overrightarrow{Ob}_k \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{dB_k^m[r, s]}{dt}(a) \overrightarrow{Ob}_k. \end{aligned}$$

Από την Πρόταση 6.3 παίρνουμε:

$$\frac{d}{dt} B_k^m[r, s](t) = \frac{m}{s-r} (B_{k-1}^{m-1}[r, s](t) - B_k^{m-1}[r, s](t)).$$

Οπότε, προκύπτει:

$$\begin{aligned} DF(\bar{a}) &= \frac{m}{s-r} \left( \sum_{k=1}^m B_{k-1}^{m-1}[r, s](a) \overrightarrow{Ob}_k - \sum_{k=0}^{m-1} B_k^{m-1}[r, s](a) \overrightarrow{Ob}_k \right) \\ &= \frac{m}{s-r} \sum_{k=0}^{m-1} B_k^{m-1}[r, s](a) (b_{k+1} - b_k) \end{aligned}$$

Στη συνέχεια ορίζουμε τον τελεστή διαφοράς  $\Delta$  ως εξής:

$$\Delta b_j = b_{j+1} - b_j.$$

Έτσι, έχουμε:

$$DF(\bar{a}) = \frac{m}{s-r} \sum_{k=0}^{m-1} B_k^{m-1}[r, s](a) \Delta b_k.$$

Για να υπολογίσουμε τις παραγώγους μεγαλύτερης τάξης της καμπύλης  $F$  θα χρησιμοποιήσουμε τον επαναλαμβανόμενο τελεστή διαφοράς, ο οποίος ορίζεται ως εξής:

$$\Delta^l b_j = \Delta^{l-1} b_{j+1} - \Delta^{l-1} b_j.$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει ο εξής τύπος:

$$\Delta^l b_j = \sum_{i=0}^l \binom{l}{i} (-1)^{l-i} b_{j+i}.$$

Για  $l = 1$  η ισότητα προφανώς ισχύει. Υποθέτουμε ότι για  $l = q$  ισχύει. Ας είναι  $l = q + 1$ . Τότε, έχουμε:

$$\begin{aligned} \Delta^{q+1} b_j &= \Delta^q b_{j+1} - \Delta^q b_j \\ &= \sum_{i=0}^q \binom{q}{i} (-1)^{q-i} b_{j+1+i} - \sum_{i=0}^q \binom{q}{i} (-1)^{q-i} b_{j+i}. \end{aligned}$$

Έτσι, προκύπτει:

$$\Delta^{q+1}b_j = (-1)^{q+1}b_j + b_{j+1+q} + \sum_{i=1}^q \left( \binom{q}{i} + \binom{q}{i-1} \right) (-1)^{q+1-i}b_{j+i}.$$

Καθώς ισχύει

$$\binom{q}{i} + \binom{q}{i-1} = \binom{q+1}{i},$$

παίρνουμε:

$$\Delta^{q+1}b_j = \sum_{i=0}^{q+1} \binom{q+1}{i} (-1)^{q+1-i} b_{j+i}.$$

Η επαναλαμβανόμενη χρήση του τύπου για τον υπολογισμό της παραγώγου  $DF$  μας δίνει το παρακάτω αποτέλεσμα για τις παραγώγους ανωτέρας τάξης.

**Πρόταση 7.3.** Για  $l = 1, \dots, m$ , έχουμε:

$$D^l F(\bar{a}) = \frac{m(m-1) \cdots (m-l+1)}{(s-r)^l} \sum_{k=0}^{m-l} B_k^{m-l}[r, s](a) \Delta^l b_k.$$

Επιπλέον, ισχύουν τα εξής:

$$D^l F(\bar{r}) = \frac{m(m-1) \cdots (m-l+1)}{(s-r)^l} \Delta^l b_0,$$

$$D^l F(\bar{s}) = \frac{m(m-1) \cdots (m-l+1)}{(s-r)^l} \Delta^l b_{m-l}.$$

**Ορισμός 7.5.** Ας είναι  $\bar{a} \in A$  με  $DF(\bar{a}) \neq 0$ . Η εφαπτομένη ευθεία της  $F$  στο σημείο  $F(\bar{a})$  είναι η ευθεία του  $A^n$ ,

$$F(\bar{a}) + \{\lambda DF(\bar{a}) / \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Από την Πρόταση 7.3 έχουμε:

$$DF(\bar{r}) = \frac{m}{s-r} (b_1 - b_0) \quad \text{και} \quad DF(\bar{s}) = \frac{m}{s-r} (b_m - b_{m-1}).$$

Οπότε, αν  $b_0 \neq b_1$ , τότε η εφαπτομένη της  $F$  στο σημείο  $b_0$  είναι ο ομοπαράλληλος υποχώρος  $\langle b_0, b_1 \rangle$ . Ομοίως, αν  $b_{m-1} \neq b_m$ , τότε η εφαπτομένη της  $F$  στο σημείο  $b_m$  είναι ο ομοπαράλληλος υποχώρος  $\langle b_{m-1}, b_m \rangle$ .

Ας είναι  $f$  η πολική μορφή της  $F$  και  $\hat{f}$  η γραμμικοποίηση της  $f$ . Θα δώσουμε μία έκφραση των παραγώγων της  $F$  με τη βοήθεια της  $\hat{f}$ . Πιο συγκεκριμένα, έχουμε την παρακάτω πρόταση την οποία θα χρησιμοποιήσουμε στην επόμενη ενότητα:

**Πρόταση 7.4.** Για  $l = 1, \dots, m$ , έχουμε:

$$i(D^l F(\bar{r})) = m(m-1) \cdots (m-l+1) \underbrace{\hat{f}(j(\bar{r}), \dots, j(\bar{r}), i(\vec{1}), \dots, i(\vec{1}))}_{m-l} \underbrace{i(\vec{1})}_l.$$

*Απόδειξη.* Θεωρούμε την ποσότητα

$$\underbrace{\hat{f}(j(\bar{r}), \dots, j(\bar{r}), i(\vec{1}), \dots, i(\vec{1}))}_{m-l} \underbrace{i(\vec{1})}_l = \hat{f}\left(\underbrace{j(\bar{r}), \dots, j(\bar{r})}_{m-l}, \underbrace{i\left(\frac{\bar{s}-\bar{r}}{s-r}\right), \dots, i\left(\frac{\bar{s}-\bar{r}}{s-r}\right)}_l\right).$$

Καθώς η  $j$  είναι ομοπαράλληλη απεικόνιση με προσαρτημένη γραμμική την  $\iota$ , έχουμε  $j(\bar{s}) = j(\bar{r}) + \iota(\bar{s} - \bar{r})$ . Στη συνέχεια η πολυγραμμικότητα της  $\hat{f}$  δίνει:

$$\begin{aligned} \hat{f}(j(\bar{r}), \dots, j(\bar{r}), \iota(\vec{1}), \dots, \iota(\vec{1})) &= \\ \frac{1}{(s-r)^l} \hat{f}(j(\bar{r}), \dots, j(\bar{r}), j(\bar{s}) - j(\bar{r}), \dots, j(\bar{s}) - j(\bar{r})). \end{aligned}$$

Η τιμή της  $\hat{f}$  μπορεί να γραφεί ως άθροισμα όρων της μορφής

$$\hat{f}(j(\bar{r}), \dots, j(\bar{r}), j(\bar{s}), \dots, j(\bar{s}), \hat{\iota}j(\bar{r}), \dots, \hat{\iota}j(\bar{r}))$$

και κάθε τέτοιος όρος εμφανίζεται  $\binom{l}{i}$  φορές. Έτσι, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \hat{f}(j(\bar{r}), \dots, j(\bar{r}), \iota(\vec{1}), \dots, \iota(\vec{1})) &= \\ \frac{1}{(s-r)^l} \sum_{i=0}^l \binom{l}{i} (-1)^{l-i} \hat{f}(j(\bar{r}), \dots, j(\bar{r}), j(\bar{s}), \dots, j(\bar{s})). \end{aligned}$$

Καθώς ισχύει  $j \circ f = \hat{f} \circ j^m$  και

$$f(\underbrace{\bar{r}, \dots, \bar{r}}_{m-i}, \underbrace{\bar{s}, \dots, \bar{s}}_i) = b_i$$

προκύπτει:

$$\hat{f}(j(\bar{r}), \dots, j(\bar{r}), \iota(\vec{1}), \dots, \iota(\vec{1})) = \frac{1}{(s-r)^l} \sum_{i=0}^l \binom{l}{i} (-1)^{l-i} j(b_i).$$

Έχουμε

$$\sum_{i=0}^l \binom{l}{i} (-1)^{l-i} = (1-1)^l = 0$$

και επομένως η Πρόταση 4.1(β), δίνει:

$$\sum_{i=0}^l \binom{l}{i} (-1)^{l-i} j(b_i) = \sum_{i=0}^l \binom{l}{i} (-1)^{l-i} \iota(\vec{0}b_i).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, παίρνουμε:

$$\iota(D^l F(\bar{r})) = m(m-1) \cdots (m-l+1) \hat{f}(j(\bar{r}), \dots, j(\bar{r}), \iota(\vec{1}), \dots, \iota(\vec{1})).$$

□

## 7.5 Συνένωση Καμπυλών

Συχνά για την επιτυχή υλοποίηση διαφόρων εφαρμογών είναι αναγκαία η συνένωση πολλών τμημάτων καμπυλών βαθμού το πολύ τέσσερα με ομαλό τρόπο. Σ' αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με αυτό το θέμα. Ας είναι  $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^n$  και  $G : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^n$  ( $n \geq 2$ ) δύο καμπύλες πολικού βαθμού  $m$ . Θεωρούμε  $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r} \in \mathbb{A}$  με  $\bar{p} < \bar{q} < \bar{r}$ .

**Ορισμός 7.6.** Λέμε ότι τα τμήματα  $F([\bar{p}, \bar{q}])$  και  $G([\bar{q}, \bar{r}])$  ενώνονται με παραμετρική συνέχεια  $C^k$  στο  $\bar{q}$ , όπου  $0 \leq k \leq m$ , αν για κάθε  $i = 0, \dots, k$  ισχύει:

$$D^i F(\bar{q}) = D^i G(\bar{q}),$$

όπου έχουμε θέσει  $D^0 F(\bar{q}) = F(\bar{q})$  και  $D^0 G(\bar{q}) = G(\bar{q})$ . Επίσης, θα λέμε ότι τα δύο αυτά τμήματα ενώνονται με παραμετρική συνέχεια  $C^{-1}$  στο  $\bar{q}$ , αν δεν απαιτούμε καμμία συνθήκη.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε:

$$F(t) = \sum_{k=0}^m B_k^m[p, q](t) b_k \quad \text{και} \quad G(t) = \sum_{k=0}^m B_k^m[q, r](t) c_k.$$

Τότε, η συνέχεια  $C^0$  στο  $\bar{q}$  ισοδυναμεί με την ισότητα

$$b_m = F(\bar{q}) = G(\bar{q}) = c_0.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 7.3, η ισότητα  $DF(\bar{q}) = DG(\bar{q})$  ισοδυναμεί με την ισότητα:

$$\frac{m}{q-p}(b_m - b_{m-1}) = DF(\bar{q}) = DG(\bar{q}) = \frac{m}{r-q}(c_1 - c_0).$$

Έτσι, η συνέχεια  $C^1$  στο  $\bar{q}$ , ισοδυναμεί με τις ισότητες:

$$b_m = c_0 \quad \text{και} \quad (q-p)(c_1 - c_0) = (r-q)(b_m - b_{m-1}).$$

Έτσι, αν  $b_m \neq b_{m-1}$  και  $c_0 \neq c_1$ , τότε οι δύο καμπύλες έχουν την ίδια εφαπτομένη στο σημείο  $b_m = c_0$ . Επιπλέον, ισχύει:

$$c_1 = b_m + \frac{r-q}{q-p}(b_m - b_{m-1}).$$

Η συνένωση των δύο καμπυλών  $F$  και  $G$  στο  $\bar{q}$  με παραμετρική συνέχεια  $C^2$  εξασφαλίζει την απουσία απότομης μεταβολής της κλίσης της συνολικής καμπύλης σ' αυτό το σημείο. Για να ενώνονται οι  $F$  και  $G$  στο  $\bar{q}$  με παραμετρική συνέχεια  $C^2$  πρέπει και αρκεί, να ισχύει, εκτός από τις δύο παραπάνω σχέσεις, και η ισότητα

$$D^2 F(\bar{q}) = D^2 G(\bar{q}).$$

Από την τελευταία αυτή ισότητα μπορούμε να εκφράσουμε την τιμή  $c_2$  συναρτήσει των σημείων  $b_{m-2}, b_{m-1}$  και  $b_m$ .

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, βλέπουμε ότι κάθε βαθμός συνέχειας καθορίζει ένα ακόμη σημείο ελέγχου της καμπύλης που θα ενωθεί με την αρχική. Καθώς στην πράξη χρησιμοποιούνται καμπύλες μικρού πολικού βαθμού, συνήθως 3 ή 4, η παραμετρική συνέχεια είναι αρκετά περιοριστική.

**Παράδειγμα 7.7.** Ας είναι  $F$  η καμπύλη με σημεία ελέγχου

$$b_0 = (0, 1, 0), \quad b_1 = (1, 1, 0), \quad b_2 = (1, 2, 1), \quad b_3 = (2, 3, 1)$$

επί του ομοπαράλληλικού πλαισίου  $(p, q) = (0, 1)$  και  $G$  η καμπύλη με σημεία ελέγχου

$$c_0 = (2, 3, 1), \quad c_1 = (3, 4, 1), \quad c_2 = (-2, 1, 2), \quad c_3 = (3, -1, 1)$$

επί του ομοπαράλληλικού πλαισίου  $(q, r) = (1, 2)$ .

Παρατηρούμε αμέσως ότι  $F(1) = (2, 3, 1) = G(1)$ . Από την Πρόταση 7.3 έχουμε:

$$D^1F(1) = 3\Delta^1b_2 = 3(b_3 - b_2) = 3(1, 1, 0)$$

και

$$D^1G(1) = 3\Delta^1c_0 = 3(c_1 - c_0) = 3(1, 1, 0).$$

Άρα, ισχύει  $D^1F(1) = D^1G(1)$ . Επίσης, υπολογίζουμε:

$$D^2F(1) = 2\Delta^2b_1 = 2(b_1 - 2b_2 + b_3) = (2, 0, -2)$$

και

$$D^2G(1) = 2\Delta^2c_0 = 2(c_0 - 2c_1 + c_2) = (-12, -10, 6).$$

Επομένως  $D^2F(1) \neq D^2G(1)$  και κατά συνέπεια οι καμπύλες  $F$  και  $G$  ενώνονται στο σημείο  $b_2 = c_0$  με παραμετρική συνέχεια  $C^1$ .

Στη συνέχεια θα χαρακτηρίσουμε την παραμετρική συνέχεια  $C^k$  χρησιμοποιώντας τις πολικές μορφές  $f$  και  $g$  των  $F$  και  $G$ , αντίστοιχα.

**Πρόταση 7.5.** Τα τμήματα  $F([\bar{p}, \bar{q}])$  και  $G([\bar{q}, \bar{r}])$  ενώνονται με παραμετρική συνέχεια  $C^k$  στο  $\bar{q}$ , όπου  $0 \leq k \leq m$ , αν και μόνον αν ισχύει:

$$f(\bar{q}, \dots, \bar{q}, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k) = g(\bar{q}, \dots, \bar{q}, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k),$$

για κάθε  $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k \in \mathbb{A}$ .

*Απόδειξη.* Ας υποθέσουμε ότι για κάθε  $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k \in \mathbb{A}$  ισχύει:

$$f(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k, \bar{q}, \dots, \bar{q}) = g(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k, \bar{q}, \dots, \bar{q}).$$

Αν  $\bar{u}_i = \bar{q}$  ( $i = 1, \dots, k$ ) τότε έχουμε  $f(\bar{q}, \dots, \bar{q}) = g(\bar{q}, \dots, \bar{q})$ , απ' όπου έπεται  $F(\bar{q}) = G(\bar{q})$  και κατά συνέπεια έχουμε παραμετρική συνέχεια  $C^0$  στο  $\bar{q}$ . Από την Πρόταση 7.3, για  $j = 1, \dots, k$  έχουμε:

$$D^jF(\bar{q}) = \frac{m(m-1) \cdots (m-j+1)}{(r-q)^j} \sum_{i=0}^j (-1)^{j-i} \underbrace{f(\bar{q}, \dots, \bar{q}, \bar{r}, \dots, \bar{r})}_{m-i} \underbrace{\quad}_{i}$$

και

$$D^jG(\bar{q}) = \frac{m(m-1) \cdots (m-j+1)}{(r-q)^j} \sum_{i=0}^j (-1)^{j-i} \underbrace{g(\bar{q}, \dots, \bar{q}, \bar{r}, \dots, \bar{r})}_{m-i} \underbrace{\quad}_{i}$$

Καθώς  $i \leq j \leq k$ , ισχύει

$$\underbrace{f(\bar{q}, \dots, \bar{q}, \bar{r}, \dots, \bar{r})}_{m-i} \underbrace{\quad}_{i} = \underbrace{g(\bar{q}, \dots, \bar{q}, \bar{r}, \dots, \bar{r})}_{m-i} \underbrace{\quad}_{i}$$

και επομένως έπεται  $D^jF(\bar{q}) = D^jG(\bar{q})$ . Συνεπώς, έχουμε παραμετρική συνέχεια  $C^k$  στο  $\bar{q}$ .

Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι έχουμε παραμετρική συνέχεια  $C^k$  στο  $\bar{q}$  και επομένως ισχύει  $D^iF(\bar{q}) = D^iG(\bar{q})$   $i = 0, \dots, k$ . Έτσι, για  $i = 0$ , έχουμε  $f(\bar{q}, \dots, \bar{q}) = g(\bar{q}, \dots, \bar{q})$ . Σύμφωνα με την Πρόταση 7.4, για  $i = 1, \dots, m$ , έχουμε:

$$i(D^iF(\bar{q})) = m(m-1) \cdots (m-i+1) \underbrace{\hat{f}(j(\bar{q}), \dots, j(\bar{q}), i(\vec{1}), \dots, i(\vec{1}))}_{m-i} \underbrace{\quad}_{i}$$

και

$${}_i(D^l G(\bar{q})) = m(m-1) \cdots (m-l+1) \underbrace{\hat{g}(j(\bar{q}), \dots, j(\bar{q}))}_{m-l}, \underbrace{i(\vec{1}), \dots, i(\vec{1}))}_l.$$

Άρα, για  $i = 1, \dots, k$ , ισχύει:

$$\underbrace{\hat{f}(j(\bar{q}), \dots, j(\bar{q}))}_{m-i}, \underbrace{i(\vec{1}), \dots, i(\vec{1}))}_i = \underbrace{\hat{g}(j(\bar{q}), \dots, j(\bar{q}))}_{m-i}, \underbrace{i(\vec{1}), \dots, i(\vec{1}))}_i.$$

Αν  $\bar{u}_i \in \mathbb{A}$ , τότε γράφουμε  $\bar{u}_i = \bar{q} + (u_i - q)\vec{1}$ . Έτσι, για κάθε  $j$  με  $1 \leq j \leq k$ , έχουμε:

$$\begin{aligned} \underbrace{\hat{f}(j(\bar{q}), \dots, j(\bar{q}))}_{m-j}, j(\bar{u}_1), \dots, j(\bar{u}_j) &= \\ \underbrace{\hat{f}(j(\bar{q}), \dots, j(\bar{q}))}_{m-j}, j(\bar{q}) \hat{+} (u_1 - q)i(\vec{1}), \dots, j(\bar{q}) \hat{+} (u_j - q)i(\vec{1}). \end{aligned}$$

Έτσι, προκύπτει:

$$\begin{aligned} \underbrace{\hat{f}(j(\bar{q}), \dots, j(\bar{q}))}_{m-j}, j(\bar{u}_1), \dots, j(\bar{u}_j) &= \\ \sum_{i=0}^j \sum_{\substack{L \subseteq \{1, \dots, j\} \\ |L|=i}} \prod_{l \in L} (u_l - q) \underbrace{\hat{f}(j(\bar{q}), \dots, j(\bar{q}))}_{m-i}, \underbrace{j(i(\vec{1}), \dots, i(\vec{1}))}_i. \end{aligned}$$

Ομοίως, έχουμε:

$$\begin{aligned} \underbrace{\hat{g}(j(\bar{q}), \dots, j(\bar{q}))}_{m-j}, j(\bar{u}_1), \dots, j(\bar{u}_j) &= \\ \sum_{i=0}^j \sum_{\substack{L \subseteq \{1, \dots, j\} \\ |L|=i}} \prod_{l \in L} (u_l - q) \underbrace{\hat{g}(j(\bar{q}), \dots, j(\bar{q}))}_{m-i}, \underbrace{j(i(\vec{1}), \dots, i(\vec{1}))}_i. \end{aligned}$$

Καθώς όμως είδαμε παραπάνω ισχύει:

$$\underbrace{\hat{f}(j(\bar{q}), \dots, j(\bar{q}))}_{m-i}, \underbrace{i(\vec{1}), \dots, i(\vec{1}))}_i = \underbrace{\hat{g}(j(\bar{q}), \dots, j(\bar{q}))}_{m-i}, \underbrace{i(\vec{1}), \dots, i(\vec{1}))}_i.$$

Συνδυάζοντας τις προηγούμενες ισότητες, έχουμε:

$$\underbrace{\hat{f}(j(\bar{q}), \dots, j(\bar{q}))}_{m-j}, j(\bar{u}_1), \dots, j(\bar{u}_j) = \underbrace{\hat{g}(j(\bar{q}), \dots, j(\bar{q}))}_{m-j}, j(\bar{u}_1), \dots, j(\bar{u}_j).$$

Έχουμε  $\hat{f} \circ j^m = j \circ f$  και η απεικόνιση  $j$  είναι ένεση. Άρα, ισχύει:

$$f(\bar{q}, \dots, \bar{q}, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k) = g(\bar{q}, \dots, \bar{q}, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k).$$

□

**Παρατήρηση 7.1.** Παρατηρούμε ότι οι καμπύλες  $F$  και  $G$  ενώνονται στο  $\bar{q}$  με παραμετρική συνέχεια  $C^m$  αν και μόνον αν  $f = g$ , δηλαδή αν και μόνον αν έχουμε  $F = G$ .

**Παράδειγμα 7.8.** Ας είναι  $F$  και  $G$  οι πολυωνυμικές καμπύλες του Παραδείγματος 7.7. Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα την Πρόταση 7.5 για να προσδιορίσουμε την παραμετρική συνέχεια της ένωσης των τμημάτων  $F([0, 1])$  και  $G([1, 2])$ . Οι  $F$  και  $G$  δίνονται από τις σχέσεις:

$$F(t) = \sum_{k=0}^3 B_k^3(t)b_i \quad \text{και} \quad G(t) = \sum_{k=0}^3 B_k^3[1, 2](t)c_i, \quad \forall t \in \mathbb{A}.$$

Πιο αναλυτικά, έχουμε:

$$F(t) = (2t^3 - 3t^2 + 3t, -t^3 + 3t^2 + 1, -2t^3 + 3t^2)$$

και

$$G(t) = (16t^3 - 66t^2 + 87t - 35, 5t^3 - 27t^2 + 42t - 17, -3t^3 + 12t^2 - 15t + 7).$$

Έχουμε  $F(1) = (2, 3, 1) = G(1)$ . Θέτουμε:

$$\sigma_1 = t_1 + t_2 + t_3, \quad \sigma_2(t_1, t_2, t_3) = t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3, \quad \sigma_3(t_1, t_2, t_3) = t_1t_2t_3.$$

Οι αντίστοιχες 3-πολικές μορφές των  $F$  και  $G$  είναι:

$$f(t_1, t_2, t_3) = (2\sigma_3 - \sigma_2 + \sigma_1, -\sigma_3 + \sigma_2 + 1, -2\sigma_3 + \sigma_2)$$

και

$$g(t_1, t_2, t_3) =$$

$$(16\sigma_3 - 22\sigma_2 + 29\sigma_1 - 35, 5\sigma_3 - 9\sigma_2 + 14\sigma_1 - 17, -3\sigma_3 + 4\sigma_2 - 5\sigma_1 + 7).$$

Έχουμε:

$$f(1, 1, t) = (t + 1, t + 2, 1) = g(1, 1, t)$$

και

$$f(1, t_1, t_2) = (t_2t_3 + 1, t_2 + t_3 + 1, -t_2t_3 + t_2 + t_3),$$

$$g(1, t_2, t_3) = (-6t_2t_3 + 7(t_2 + t_3) - 6, -4t_2t_3 + 5(t_2 + t_3) - 3, t_2t_3 - t_2 - t_3 + 2).$$

Εύκολα βλέπουμε ότι οι απεικονίσεις  $f(1, t_1, t_2)$  και  $g(1, t_2, t_3)$  είναι διαφορετικές (για παράδειγμα, αν πάρουμε  $(t_2, t_3) = (0, 0)$  έχουμε  $f(1, 0, 0) = (1, 1, 0)$  και  $g(1, 0, 0) = (-6, -3, 2)$ ). Επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση 7.5, οι καμπύλες  $F$  και  $G$  ενώνονται στο  $t = 1$  με παραμετρική συνέχεια  $C^1$ .

Ας σημειωθεί ότι θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τις πολικές μορφές  $f$  και  $g$  χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 6.1.

Στο Σχήμα 7.3 οι κυβικές καμπύλες  $F$  και  $G$  ενώνονται στο  $\bar{q}$  και επιπλέον ισχύει:

$$f(\bar{p}, \bar{q}, \bar{q}) = g(\bar{p}, \bar{q}, \bar{q}) \quad \text{και} \quad f(\bar{q}, \bar{q}, \bar{r}) = g(\bar{q}, \bar{q}, \bar{r}).$$

Επομένως, έχουμε παραμετρική συνέχεια  $C^1$  στο  $\bar{q}$ . Επίσης, βλέπουμε ότι εφαπτομένες των  $F$  και  $G$  συμπίπτουν στο  $\bar{q}$ .

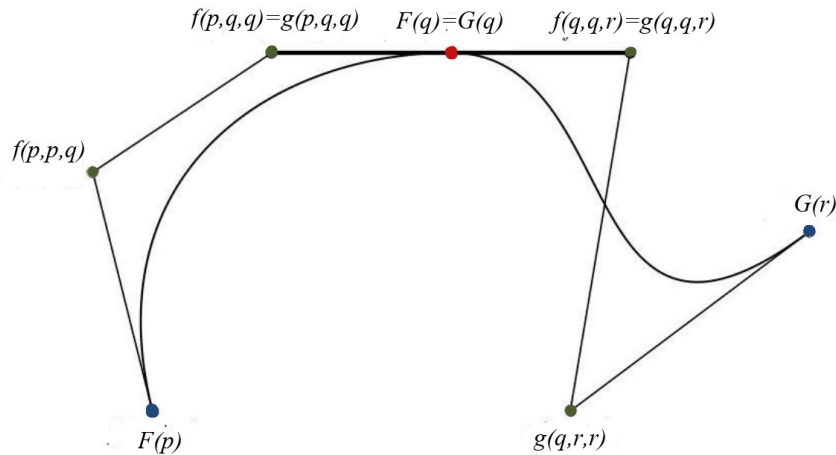
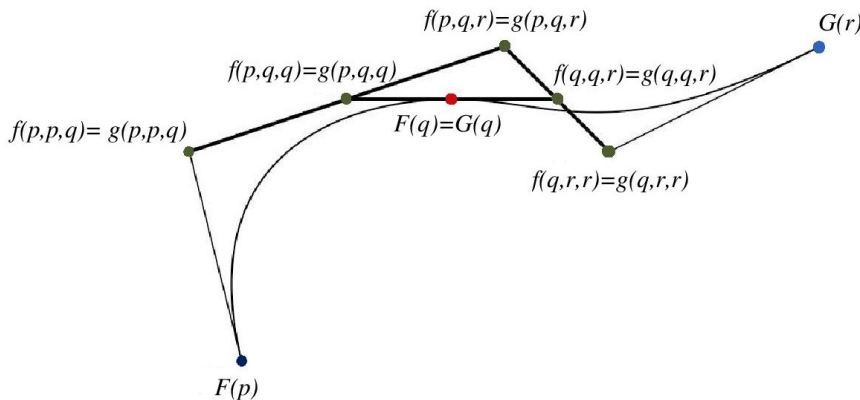
Στο Σχήμα 7.4 οι κυβικές καμπύλες  $F$  και  $G$  ενώνονται στο  $\bar{q}$  και επιπλέον έχουμε

$$f(\bar{p}, \bar{q}, \bar{q}) = g(\bar{p}, \bar{q}, \bar{q}), \quad f(\bar{q}, \bar{q}, \bar{r}) = g(\bar{q}, \bar{q}, \bar{r}), \quad f(\bar{p}, \bar{p}, \bar{q}) = g(\bar{p}, \bar{p}, \bar{q})$$

$$f(\bar{q}, \bar{r}, \bar{r}) = g(\bar{q}, \bar{r}, \bar{r}) \quad \text{και} \quad f(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}) = g(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}).$$

Έτσι, οι  $F$  και  $G$  ενώνονται με παραμετρική συνέχεια  $C^2$ .

Στο επόμενο κεφάλαιο θα μελετήσουμε τις  $B$ -spline καμπύλες των οποίων ο ορισμός βασίζεται στην παραμετρική συνέχεια την οποία εισάγαμε σε αυτή την ενότητα. Ας σημειωθεί ότι μία πιο ασθενής έννοια συνέχειας στα σημεία ένωσης των καμπυλών η οποία χρησιμοποιείται αρκετά συχνά είναι η *γεωμετρική συνέχεια*. Αυτή βασίζεται σε γεωμετρικά στοιχεία των καμπυλών και ορίζεται ως εξής: Δύο καμπύλες ενώνονται με γεωμετρική συνέχεια  $G^2$  σ' ένα σημείο, αν το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα είναι συνεχές και η καμπυλότητα είναι συνεχής στο σημείο της ένωσης. Η έννοια της γεωμετρικής συνέχειας οδηγεί στην κατασκευή πιο ευέλικτων μορφών καμπυλών όπως των  $\nu$ - και  $\gamma$ -spline [1, 5, 7]

Σχήμα 7.3: Συνένωση κυβικών καμπυλών με παραμετρική συνέχεια  $C^1$  στο  $q$ .Σχήμα 7.4: Συνένωση κυβικών καμπυλών με παραμετρική συνέχεια  $C^2$  στο  $q$ .

## 7.6 Ασκήσεις-Εργασίες

### Ασκήσεις

7.6.1 Θεωρούμε την κυβική καμπύλη  $F$  στο επίπεδο η οποία ορίζεται από τα εξής τέσσερα σημεία ελέγχου ως προς το ομοπαραλληλικό πλαίσιο  $r = 0, s = 1$  του  $\mathbb{A}$ :

$$b_0 = (6, -6), \quad b_1 = (-6, 10), \quad b_2 = (-6, -10), \quad b_3 = (6, 6).$$

Να βρεθούν τα σημεία  $F(1/3)$ ,  $F(1/2)$  και  $F(2/3)$  με τη χρήση του αλγορίθμου του de Casteljau.

7.6.2 Δίνεται η πολυωνυμική καμπύλη

$$F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^3, \quad t \mapsto (t^3 + 1, 2t + 1, t^2 + 3).$$

Να βρεθεί η πολική μορφή της  $F$  με τον μικρότερο βαθμό και τα σημεία ελέγχου της ως προς το ομοπαραλληλικό πλαίσιο  $(0, 1)$ . Κατόπιν να υπολογιστεί το σημείο  $F(1/2)$ , να διαιρεθεί το τμήμα  $F([0, 1])$  σε δύο τμήματα και να υπολογιστούν τα σημεία ελέγχου κάθε τμήματος.

7.6.3 Θεωρούμε την καμπύλη  $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^2$  η οποία ορίζεται από τις σχέσεις

$$x(t) = 9p(3t^2 - 1) \quad \text{και} \quad y(t) = 9pt(3t^2 - 1),$$



όπου  $p \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$ . Να βρεθούν οι πολικές μορφές των  $x(t)$  και  $y(t)$ , τα σημεία ελέγχου της καμπύλης ως προς το ομοπαράλληλο πλαίσιο  $r = -1$  και  $s = 1$  και οι εφαπτομένες της καμπύλης στο  $t = 0$ .

**7.6.4** Θεωρούμε την καμπύλη  $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^2$  η οποία ορίζεται από τα παρακάτω σημεία ελέγχου ως προς το ομοπαράλληλο πλαίσιο  $r = 0, s = 1$  του  $\mathbb{A}$ :

$$b_0 = (0, -4), \quad b_1 = (10, 30), \quad b_2 = (5, 20), \quad b_3 = (0, 30), \quad b_4 = (10, -4).$$

Να υπολογιστεί το σημείο  $F(1/2)$  με τη χρήση του αλγορίθμου του de Casteljau. Επίσης, να εξεταστεί αν η καμπύλη  $F$  τέμνει τον εαυτό της.

**7.6.5** Να χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος του de Casteljau για τον σχεδιασμό μίας καμπύλης  $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^3$  τετάρτου βαθμού της οποίας το τρίτο σημείο ελέγχου  $b_2$  ανήκει στην καμπύλη.

**7.6.6** Ας είναι  $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) = (1, 2, 3, 6, 7, 8)$  μία προοδευτική ακολουθία και

$$b_0 = (0, 1, 0), \quad b_1 = (1, 1, 1), \quad b_2 = (-1, 2, 1), \quad b_3 = (2, 2, -1)$$

σημεία του  $\mathbb{A}^3$ . Να βρεθεί η μοναδική πολυωνμική καμπύλη  $F$  πολικού βαθμού 3 της οποίας η αντίστοιχη πολική μορφή  $f$  ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(u_{k+1}, u_{k+2}, u_{k+3}) = b_k \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

**7.6.7** Ας είναι  $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) = (2, 3, 5, 6, 7, 9)$  μία προοδευτική ακολουθία και

$$b_0 = (0, 1, 1), \quad b_1 = (1, 1, 1), \quad b_2 = (-2, 2, -1), \quad b_3 = (2, -2, -1)$$

σημεία του  $\mathbb{A}^3$ . Θεωρούμε τη μοναδική πολυωνμική καμπύλη  $F$  πολικού βαθμού 3 της οποίας η αντίστοιχη πολική μορφή  $f$  ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(u_{k+1}, u_{k+2}, u_{k+3}) = b_k \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Να χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος του de Boor για τον υπολογισμό της τιμής  $f(-2, 4, 7)$ .

**7.6.8** Ας είναι  $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) = (1, 1, 2, 3, 4, 5)$  μία προοδευτική ακολουθία και  $b_0 = (0, 0, 1), b_1 = (1, 0, 1), b_2 = (1, 1, 1), b_3 = (2, 1, -1)$  τρία σημεία του  $\mathbb{A}^3$ . Να προσδιοριστεί η μοναδική συμμετρική 3-ομοπαράλληλη απεικόνιση  $f : \mathbb{A}^3 \rightarrow \mathbb{A}^3$  η οποία ικανοποιεί τις ισότητες:

$$f(u_{k+1}, u_{k+2}, u_{k+3}) = b_k \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

**7.6.9** Θεωρούμε την καμπύλη  $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^3$  με σημεία ελέγχου

$$b_0 = (1, 0, 0), \quad b_1 = (1, 1, 1), \quad b_2 = (0, 1, 1), \quad b_3 = (1, 1, 3),$$

ως προς το ομοπαράλληλο πλαίσιο  $(p, q) = (1, 2)$  και την καμπύλη  $G : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^3$  με σημεία ελέγχου

$$c_0 = (1, 1, 3), \quad c_1 = (4, 1, 9), \quad c_2 = (2, -3, 1), \quad c_3 = (4, 2, 2)$$

ως προς το ομοπαράλληλο πλαίσιο  $(q, r) = (2, 4)$ . Να βρεθεί το είδος της παραμετρικής συνέχειας με την οποία συνενώνονται.

**7.6.10** Ας είναι  $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^3$  μία κυβική καμπύλη η οποία ορίζεται από τα σημεία  $b_0, b_1, b_2, b_3$  ως προς το ομοπαράλληλο πλαίσιο  $r = 0, s = 1$  του  $\mathbb{A}$ . Ας υποθέσουμε ότι ένα μόνο από τα σημεία ελέγχου  $b_i$  αλλάζει σε ένα άλλο σημείο  $b'_i$ . Τότε, παίρνουμε μία διαφορετική καμπύλη  $F'$ . Να δειχθεί ότι για κάθε  $t \in [0, 1]$ , έχουμε:

$$\|F'(t) - F(t)\| = B_i^3(t) \|b'_i - b_i\|$$

(όπου  $B_i^3(t)$  είναι το  $i$ -οστό πολυώνυμο του Bernstein βαθμού 3). Επίσης, να υπολογιστεί η ποσότητα  $\|F'(t) - F(t)\|$  για  $i = 2$  και  $t = 1/2, 1/4$ .

**7.6.11** Ας είναι  $(r, s)$  με  $r < s$  ένα ομοπαράλληλο πλαίσιο του  $\mathbb{A}$  και  $t \in \mathbb{A}$  με  $r < t < s$ . Θεωρούμε μία πολυωνυμική καμπύλη  $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^n$  και ας είναι  $f$  η πολική μορφή της. Θέτουμε  $b_{0,m-1} = f(t, \dots, t, r)$  και  $b_{1,m-1} = f(t, \dots, t, s)$ . Να δειχθεί ότι ισχύει:

$$DF(t) = \frac{m}{s-r} (b_{1,m-1} - b_{0,m-1}).$$

Επίσης, η εφαπτομένη ευθεία της καμπύλης  $F$  στο  $F(t)$  είναι ο ομοπαράλληλος υποχώρος που ορίζεται από τα σημεία  $b_{1,m-1}$  και  $b_{0,m-1}$ .

## Βιβλιογραφία

- [1] R.H. Bartels, J.C. Beatty και B.A. Barsky. *An Introduction to Splines for use in Computer Graphics and Geometric Modelling*. Morgan-Kaufmann Publishers, 1987.
- [2] N. Carter. *Introduction to the Mathematics of Computer Graphics*. Mathematical Association of America, 2016.
- [3] P.d.F. De Casteljau. *Shape mathematics and CAD*. London: Kogan Page Ltd, 1986.
- [4] Tony deRose, Michael Lounsbery και Ronald Goldman. "A Tutorial Introduction to Blossoming". Στο: *Geometric Modeling*. Επιμέλεια υπό Hans Hagen και Dieter Roller. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1991, σσ. 267–286.
- [5] G. Farine. *Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design, A practical Guide*. San Diego: Academic Press, 1997.
- [6] J. Gallier. *Curves and Surfaces in Geometric Modelling: Theory and Algorithms*. San Francisco: The Morgan-Kaufmann Series in Computer Graphics. Morgan-Kaufman Publishers, 1999.
- [7] J. Hoschek. *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*. AK Peters, 1993.
- [8] S. Mann. *A Blossoming Development of Splines*. Morgan & Claypool Publishers, 2006.
- [9] M.E. Mortenson. *Geometric Modelling*. Industrial Press Inc, 2006.
- [10] H. Prautzsch, W. Boehm και M. Paluszny. *Bézier and B-Spline Techniques*. Springer, 2002.
- [11] L. Ramshaw. *Blossoming: A connect the dots approach to splines*. Palo Alto, California: Digital Systems Research Center: SRC reports, 1987.
- [12] L. Ramshaw. "Blossoms are polar forms". Στο: *Computer Aided Geometric Design* 6.4 (1989), σσ. 323–358.
- [13] Thomas W. Sederberg. *Computer Aided Geometric Design*. Faculty Publications, 2012.
- [14] H.P. Seidel. "An introduction to polar forms". Στο: *IEEE Computer Graphics and Applications* 13.1 (1993), σσ. 38–46.
- [15] Θ. Θεοχάρης και Α. Μπεμ. *Γραφικά. Αρχές και Αλγόριθμοι*. Εκδόσεις Συμμετρία, 1999.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

---

### ΚΑΜΠΥΛΕΣ B-Spline

---

#### Σύνοψη

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε τη μορφή του Βέζιερ των πολυωνυμικών καμπυλών. Αν και η μορφή αυτή αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο για τη Γεωμετρική Μοντελοποίηση, έχει και μερικά μειονεκτήματα. Για παράδειγμα, μετακίνηση ενός σημείου ελέγχου επηρεάζει ολόκληρη την καμπύλη και όχι ένα μικρό μέρος της. Επίσης, η χρήση καμπυλών με πολύγωνο ελέγχου το οποίο έχει μεγάλο πλήθος σημείων  $m$  καθιστά αρκετά δαπανηρό τον υπολογισμό των σημείων της καμπύλης, καθώς κάθε τέτοιος υπολογισμός χρειάζεται  $m(m+1)/2$  βήματα. Έτσι τα μειονεκτήματα της μορφή του Βέζιερ οδήγησαν στην ανάπτυξη και χρήση των καμπυλών B-spline οι οποίες προκύπτουν από συνένωση πολυωνυμικών καμπυλών με κατάλληλες συνθήκες συνέχειας. Σ' αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τις καμπύλες αυτές και θα δούμε βασικές τους ιδιότητες. Περισσότερες πληροφορίες δίνονται στα εξής συγγράμματα και άρθρα τα οποία επισυνάπτονται στο τέλος του κεφαλαίου.

#### 8.1 Άπειρες Ακολουθίες Κόμβων

Πρώτα θα εισάγουμε την έννοια της ακολουθίας κόμβων για να τη χρησιμοποιήσουμε στον ορισμό των καμπυλών  $B - spline$ .

**Ορισμός 8.1.** Καλούμε ακολουθία κόμβων κάθε οικογένεια  $U = (u_i)_{i \in I}$  σημείων του  $A$  τέτοιων, ώστε  $u_i \leq u_{i+1}$ , για κάθε  $i \in I$ , και κάθε στοιχείο  $u_i$  εμφανίζεται το πολύ πεπερασμένο πλήθος φορών. Καθε στοιχείο  $u_i$  καλείται κόμβος. Το πλήθος των εμφανίσεων του  $u_i$  καλείται πολλαπλότητα του  $u_i$  και συμβολίζεται με  $\pi(u_i)$ . Αν  $M$  είναι ακέραιος  $\geq 1$  τέτοιος, ώστε  $\pi(u_i) \leq M$ , για κάθε  $i \in I$ , τότε λέμε ότι η ακολουθία  $U$  έχει βαθμό πολλαπλότητας το πολύ  $M$ . Αν  $\pi(u_i) = 1$ , τότε ο κόμβος  $u_i$  καλείται απλός. Η ακολουθία  $U = (u_i)_{i \in I}$  καλείται ομοιόμορφη, αν υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός  $h$  τέτοιος, ώστε για κάθε  $k \in I$  να ισχύει  $u_{k+1} = u_k + h$ .

**Παράδειγμα 8.1.** Θεωρούμε το παρακάτω τμήμα μίας ακολουθίας κόμβων:

... , -1, 2, 4, 4, 4, 8, 9, 9, 10 ... .

Παρατηρούμε ότι  $\pi(4) = 3$  και  $\pi(9) = 2$ .

Ας είναι  $m$  ακέραιος  $\geq 1$  και  $U = (u_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  μία ακολουθία κόμβων με βαθμό πολλαπλότητας  $\leq m + 1$ .

**Ορισμός 8.2.** Καλούμε *τμηματικά πολυωνυμική καμπύλη βαθμού  $m$  επί της ακολουθίας  $U$*  κάθε απεικόνιση  $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^n$  ( $n \geq 2$ ) τέτοια, ώστε για κάθε δύο διαδοχικούς κόμβους  $u_i$  και  $u_{i+1}$  με  $u_i < u_{i+1}$  να υπάρχει πολυωνυμική καμπύλη  $F_i : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^n$  πολικού βαθμού  $m$  έτσι, ώστε ο περιορισμός της  $F$  επί του διαστήματος  $[u_i, u_{i+1}[$  να ισούται με την  $F_i$ .

Παρατηρούμε ότι στον ορισμό δεν δίνεται καμία συνθήκη σχετικά με την ένωση του τμήματος  $F_i([u_i, u_{i+1}[$  με το  $F_{i+\pi(u_{i+1})}([u_{i+1}, u_{i+1+\pi(u_{i+1})}])$ , δηλαδή αυτά ενώνονται με παραμετρική συνέχεια  $C^{-1}$  στο  $u_{i+1}$ . Στη συνέχεια εισάγουμε μία ειδική οικογένεια τμηματικά πολυωνυμικών καμπύλων οι οποίες στα σημεία ένωσης των τμημάτων των πολυωνυμικών καμπυλών οι οποίες τις αποτελούν, απαιτούν κατάλληλες συνθήκες παραμετρικής συνέχειας.

**Ορισμός 8.3.** Καλούμε *καμπύλη  $B$ -spline βαθμού  $m$  επί της ακολουθίας  $U$*  μία τμηματικά πολυωνυμική καμπύλη  $F$  επί της  $U$ , αν για κάθε  $i \in \mathbb{Z}$  τα τμήματα  $F_i([u_i, u_{i+1}[$  και  $F_{i+\pi(u_{i+1})}([u_{i+1}, u_{i+1+\pi(u_{i+1})}])$  ενώνονται με παραμετρική συνέχεια  $C^{m-\pi(u_{i+1})}$  στο  $u_{i+1}$ .

**Παράδειγμα 8.2.** Ας είναι  $U = (u_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  μία ακολουθία απλών κόμβων και μία ακολουθία διακεκριμένων σημείων  $(P_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  του  $\mathbb{A}^n$  ( $n \geq 2$ ). Τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος  $[P_{i-1}, P_i]$  δίνονται από τη σχέση:

$$F_i(t) = \frac{u_{i+1} - t}{u_{i+1} - u_i} P_{i-1} + \frac{t - u_i}{u_{i+1} - u_i} P_i, \quad t \in [u_i, u_{i+1}].$$

Για κάθε ακέραιο  $i$  ορίζουμε την απεικόνιση:

$$N_i^1(t) = \begin{cases} \frac{t - u_i}{u_{i+1} - u_i}, & \text{αν } t \in [u_i, u_{i+1}], \\ \frac{u_{i+2} - t}{u_{i+2} - u_{i+1}}, & \text{αν } t \in [u_{i+1}, u_{i+2}], \\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού.} \end{cases}$$

Στη συνέχεια, για κάθε  $t \in \mathbb{A}$ , θεωρούμε το άθροισμα:

$$F(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} N_i^1(t) P_i.$$

Αν  $t \in [u_i, u_{i+1}]$ , τότε

$$N_i^1(t) = \frac{t - u_i}{u_{i+1} - u_i}, \quad N_{i-1}^1(t) = \frac{u_{i+1} - t}{u_{i+1} - u_i}$$

και  $N_l^1(t) = 0$  για κάθε  $l \neq i - 1, i$ . Επομένως, ισχύει:

$$F(t) = N_{i-1}^1(t) P_{i-1} + N_i^1(t) P_i = F_i(t).$$

Επιπλέον, έχουμε  $F_i(u_{i+1}) = P_i = F_{i+1}(u_{i+1})$ . Συνεπώς, η  $F(t)$  είναι μία  $B$ -spline καμπύλη βαθμού 1 επί της ακολουθίας  $U$  της οποίας όλα τα τμήματα ενώνονται με παραμετρική συνέχεια  $C^0$ .

**Παράδειγμα 8.3.** Θεωρούμε τα σημεία  $P_i = (2i - 2, (i - 1)^3 + i^3)$  και  $Q_i = (2i - 1, 2i^3)$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , και τα τμήματα καμπυλών σε μορφή Βέζιερ που δίνονται από τις απεικονίσεις  $F_i : [i, i + 1] \rightarrow \mathbb{A}^2$ , με

$$F_i(t) = B_0^2[i, i + 1](t) P_i + B_1^2[i, i + 1](t) Q_i + B_2^2[i, i + 1](t) P_{i+1}$$

ή πιο αναλυτικά

$$F_i(t) = (2t - 2, 6it^2 + (2 - 6i - 6i^2)t + 2i^3 + 3i^2 + i - 1).$$

Έχουμε

$$Q_i + Q_{i+1} = (2i - 1, 2i^3) + (2i + 1, 2(i + 1)^3) = 2(2i, i^3 + (i + 1)^3) = 2P_{i+1}$$

και επομένως, σύμφωνα με την Ενότητα 3.6, τα τμήματα  $F_i([i, i + 1])$  και  $F_{i+1}([i + 1, i + 2])$  ενώνονται με παραμετρική συνέχεια  $C^1$ . Συνεπώς, η απεικόνιση  $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^2$ , με  $F(t) = F_i(t)$  για κάθε  $t \in [i, i + 1]$ , καμπύλη B-spline βαθμού 2 επί της ακολουθίας των ακεραίων.

Στην παρακάτω πρόταση θα δούμε ότι στις καμπύλες B-spline οι τιμές των πολικών μορφών  $f_i$  και  $f_j$  ( $i < j$ ) συνδέονται στην περίπτωση όπου το πλήθος  $j - i$  των ενδιάμεσων κόμβων είναι  $\leq m$ .

**Πρόταση 8.1.** Μία τμηματικά πολωνυμική καμπύλη  $F$  πολικού βαθμού  $m$  επί της  $U$  είναι μία καμπύλη B-spline, αν και μόνον αν, για κάθε ζεύγος δεικτών  $i, j$  με  $i < j \leq i + m$ ,  $u_i < u_{i+1}$ ,  $u_j < u_{j+1}$  και για κάθε  $x_1, \dots, x_{i+m-j} \in \mathbb{A}$  ισχύει:

$$f_i(x_1, \dots, x_{i+m-j}, u_{i+1}, \dots, u_j) = f_j(x_1, \dots, x_{i+m-j}, u_{i+1}, \dots, u_j).$$

*Απόδειξη.* Ας υποθέσουμε ότι για κάθε  $i, j$  με  $i < j \leq i + m$ ,  $u_i < u_{i+1}$ ,  $u_j < u_{j+1}$  και για κάθε  $x_1, \dots, x_{i+m-j} \in \mathbb{A}$  ισχύει:

$$f_i(x_1, \dots, x_{i+m-j}, u_{i+1}, \dots, u_j) = f_j(x_1, \dots, x_{i+m-j}, u_{i+1}, \dots, u_j).$$

Έτσι, αν  $\pi(u_{i+1}) \leq m$ , τότε οι πολικές μορφές  $f_i$  και  $f_{i+\pi(u_{i+1})}$  παίρνουν τις ίδιες τιμές σε κάθε σημείο  $(x_1, \dots, x_{m-\pi(u_{i+1})}, u_{i+1}, \dots)$  του  $\mathbb{A}^m$ . Καθώς  $u_{i+1} = \dots = u_{i+\pi(u_{i+1})}$ , από την Πρόταση 7.5 έπεται ότι τα τμήματα  $F_i([u_i, u_{i+1}])$  και  $F_{i+\pi(u_{i+1})}([u_{i+1}, u_{i+\pi(u_{i+1})}])$  ενώνονται με παραμετρική συνέχεια  $C^{m-\pi(u_{i+1})}$  στο  $u_{k+1}$ . Αν  $\pi(u_{i+1}) = m + 1$ , τότε τα παραπάνω τμήματα ενώνονται με παραμετρική συνέχεια  $C^{-1}$  στο  $u_{i+1}$ . Συνεπώς, η  $F$  είναι μία καμπύλη B-spline.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η  $F$  είναι μία καμπύλη B-spline. Θεωρούμε δύο δείκτες  $i$  και  $j$  με  $i < j \leq i + m$ ,  $u_i < u_{i+1}$  και  $u_j < u_{j+1}$ . Ας είναι  $n_1, \dots, n_h$  οι πολλαπλότητες των διαδοχικών διαφορετικών κόμβων της ακολουθίας  $u_{i+1}, \dots, u_j$  και επομένως  $n_1 + \dots + n_h = j - i$ . Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής επί του  $h$ . Ας είναι  $h = 1$ . Καθώς τα τμήματα  $F_i([u_i, u_{i+1}])$  και  $F_{i+n_1}([u_{i+1}, u_{i+1+n_1}])$  ενώνονται με παραμετρική συνέχεια  $C^{m-n_1}$  στο  $u_{i+1}$ , από την Πρόταση 7.5 έχουμε ότι οι πολικές μορφές  $f_i$  και  $f_{i+n_1}$  παίρνουν τις ίδιες τιμές σε κάθε σημείο  $(x_1, \dots, x_{m-n_1}, u_{i+1}, \dots, u_{i+n_1}) \in \mathbb{A}^m$ . Στη συνέχεια ας υποθέσουμε ότι για  $h = r$  η προς απόδειξη σχέση ισχύει. Ας είναι  $h = r + 1$ . Τότε, για την ακολουθία  $u_{i+n_1+1}, \dots, u_j$  η υπόθεση της επαγωγής αληθεύει και επομένως οι πολικές μορφές  $f_{i+n_1}$  και  $f_j$  παίρνουν τις ίδιες τιμές σε κάθε σημείο  $(x_1, \dots, x_{m+i-n_1-1}, u_{i+n_1+1}, \dots, u_j) \in \mathbb{A}^m$ . Επίσης, από την περίπτωση  $h = 1$  έχουμε ότι οι  $f_i$  και  $f_{i+n_1}$  παίρνουν τις ίδιες τιμές σε κάθε σημείο  $(x_1, \dots, x_{m-n_1}, u_{i+1}, \dots, u_{i+n_1}) \in \mathbb{A}^m$ . Συνεπώς, οι τιμές των  $f_i$  και  $f_j$  συμπίπτουν σε κάθε σημείο  $(x_1, \dots, x_{m+i-j}, u_{i+1}, \dots, u_j) \in \mathbb{A}^m$ .  $\square$

Ας υποθέσουμε ότι η  $F$  είναι μία καμπύλη B-spline και  $k$  ακεραίος. Αν  $i$  και  $j$  είναι δείκτες με  $u_i < u_{i+1}$ ,  $u_j < u_{j+1}$  και  $k \leq i < j \leq k + m$ , τότε από την Πρόταση 8.1 έχουμε:

$$f_i(u_{k+1}, \dots, u_{k+m}) = f_j(u_{k+1}, \dots, u_{k+m}).$$

**Ορισμός 8.4.** Η κοινή τιμή  $d_k$  των πολικών μορφών  $f_i$  με  $k \leq i \leq k + m$  στο  $(u_{k+1}, \dots, u_{k+m})$  καλείται σημείο ελέγχου του de Boor.

**Παράδειγμα 8.4.** Θεωρούμε την B-spline καμπύλη του Παραδείγματος 8.3. Θα υπολογίσουμε τα σημεία ελέγχου του de Boor. Η καμπύλη αυτή προκύπτει από τη συνένωση των τμημάτων καμπυλών  $F_i : [i, i + 1] \rightarrow \mathbb{A}^2$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , με

$$F_i(t) = (2t - 2, 6it^2 + (2 - 6i - 6i^2)t + 2i^3 + 3i^2 + i - 1).$$

Από το Παράδειγμα 5.17 προκύπτει ότι η πολική μορφή της  $F_i$  δίνεται από τη σχέση

$$f_i(t_1, t_2) = 2F_i\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) - \frac{1}{2}F_i(t_1) - \frac{1}{2}F_i(t_2) = (t_1 + t_2 - 2, 6it_1t_2 + (1 - 3i - 3i^2)(t_1 + t_2) + 2i^3 + 3i^2 + i - 1).$$

Έτσι, τα σημεία του de Boor είναι τα σημεία

$$d_k = f_k(k + 1, k + 2) = (2k + 1, 2k^3 + 6k^2 + 6k + 2), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

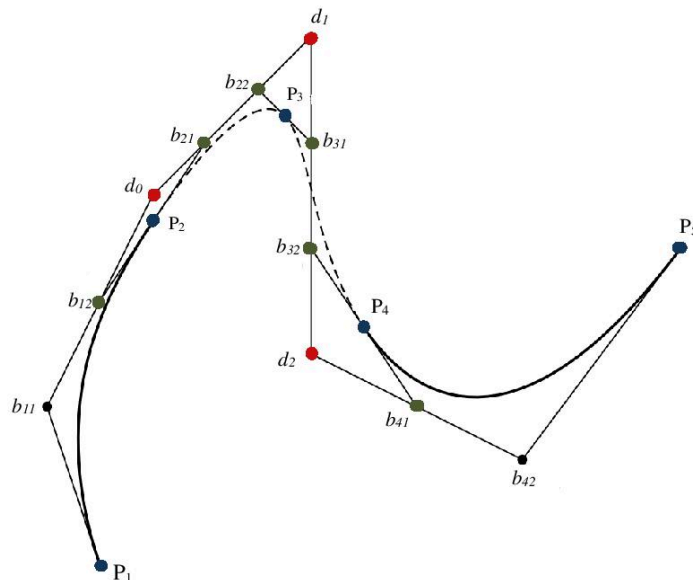
Το παρακάτω σχήμα δείχνει μέρος μίας κυβικής B – spline καμπύλης  $F$  που αντιστοιχεί στους διαφορετικούς συνεχόμενους κόμβους  $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$ . Συμβολίζουμε με  $f_i$  την πολική μορφή της καμπύλης  $F_i$  που αντιστοιχεί στο διάστημα  $[u_i, u_{i+1}]$ . Τα σημεία της  $F$  που αντιστοιχούν στους κόμβους  $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$  είναι τα  $P_i = F(u_i) = f_i(u_i, u_i, u_i)$ , ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ). Τα αντίστοιχα σημεία ελέγχου του de Boor της  $F$  είναι:

$$d_0 = f_0(u_1, u_2, u_3) = f_1(u_1, u_2, u_3) = f_2(u_1, u_2, u_3) = f_3(u_1, u_2, u_3),$$

$$d_1 = f_1(u_2, u_3, u_4) = f_2(u_2, u_3, u_4) = f_3(u_2, u_3, u_4) = f_3(u_2, u_3, u_4),$$

$$d_2 = f_2(u_3, u_4, u_5) = f_3(u_3, u_4, u_5) = f_4(u_3, u_4, u_5) = f_4(u_3, u_4, u_5).$$

Καθώς οι κόμβοι  $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$  είναι διαφορετικοί, η  $F$  έχει παραμετρική συνέχεια  $C^2$  στους κόμβους  $u_2, u_3, u_4$ . Έτσι, έχουμε ότι οι πολικές  $f_1, f_2$  έχουν τις ίδιες τιμές στις τριάδες  $u_1, u_1, u_2$  και  $(u_1, u_2, u_2)$ , οι  $f_1, f_2, f_3$  τις ίδιες τιμές στις  $(u_2, u_2, u_3)$  και  $(u_2, u_3, u_3)$ , οι πολικές  $f_2, f_3, f_4$  στις τριάδες  $(u_3, u_3, u_4)$  και  $(u_3, u_4, u_4)$ , και τέλος οι πολικές  $f_3, f_4$  στις  $(u_4, u_4, u_5)$  και  $(u_4, u_5, u_5)$ . Επίσης, τα σημεία ελέγχου του Bézier που αντιστοιχούν στο τμήμα  $F_i$  της  $F$  εκτός των ακραίων σημείων είναι τα  $b_{i,1} = f_i(u_i, u_i, u_{i+1})$  και  $b_{i,2} = f_i(u_i, u_{i+2}, u_{i+1})$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).



Σχήμα 8.1: Μέρος κυβικής καμπύλης που αντιστοιχεί στο διάστημα  $[u_1, u_5]$ .

Το παρακάτω θεώρημα δείχνει τη σημασία των σημείων του de Boor για τις καμπύλες B-spline:

**Θεώρημα 8.1.** Ας είναι  $U = (u_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  μία ακολουθία κόμβων με βαθμό πολλαπλότητας το πολύ  $m + 1$  και μία ακολουθία σημείων  $(d_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  του  $\mathbb{A}^n$  ( $n \geq 2$ ). Τότε, υπάρχει μία μοναδική B – spline καμπύλη  $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^n$  πολικού βαθμού  $m$  επί της  $U$  τέτοια, ώστε για κάθε ζεύγος δεικτών  $k, i$  με  $u_i < u_{i+1}$  και  $k \leq i \leq k + m$  η πολική μορφή  $f_i$  της καμπύλης  $F_i$  ικανοποιεί την ισότητα

$$d_k = f_i(u_{k+1}, \dots, u_{k+m}).$$

*Απόδειξη.* Ας υποθέσουμε ότι μία τέτοια B-spline καμπύλη  $F$  υπάρχει. Θεωρούμε την εξής ακολουθία κόμβων:

$$u_{i-m+1} \leq \dots \leq u_i < u_{i+1} \leq \dots \leq u_{i+m}.$$

Η ακολουθία αυτή είναι προοδευτική, και επομένως, από την Πρόταση 7.1, έχουμε ότι υπάρχει μία μοναδική πολωνυμική απεικόνιση  $F_i$  της οποίας η πολική μορφή  $f_i$  ικανοποιεί την ισότητα

$$d_k = f_i(u_{k+1}, \dots, u_{k+m}),$$

για κάθε  $k$  με  $i - m \leq k \leq i$ . Έτσι, καθώς τα τμήματα της  $F$  που αντιστοιχούν στις  $F_i$  ορίζονται με μοναδικό τρόπο, η καμπύλη  $F$  είναι μοναδική.

Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε την ύπαρξη της B-spline καμπύλης  $F$  με την παραπάνω ιδιότητα. Σύμφωνα με την Πρόταση 7.1, υπάρχει μία πολωνυμική απεικόνιση  $F_i$  της οποίας η πολική μορφή  $f_i$  ικανοποιεί την ισότητα

$$d_k = f_i(u_{k+1}, \dots, u_{k+m}),$$

για κάθε  $k$  με  $i - m \leq k \leq i$ . Ας είναι  $i, j$  με  $i < j \leq i + m$ ,  $u_i < u_{i+1}$  και  $u_j < u_{j+1}$ . Θα δείξουμε ότι οι τιμές των πολικών μορφών  $f_i$  και  $f_j$  συμπίπτουν σε κάθε σημείο του  $\mathbb{A}^m$  που μεταξύ των συντεταγμένων του βρίσκονται οι κόμβοι  $u_{i+1}, \dots, u_j$ . Για κάθε δείκτη  $k$  με  $j - m \leq k \leq i$  ισχύει:

$$f_i(u_{k+1}, \dots, u_{k+m}) = d_k = f_j(u_{k+1}, \dots, u_{k+m}).$$

Πιο αναλυτικά, έχουμε ότι οι τιμές των  $f_i$  και  $f_j$  συμπίπτουν στα σημεία με συντεταγμένες που δίνονται από τις γραμμές του παρακάτω πίνακα:

$$\begin{array}{cccccccc} u_{j-m+1} & u_{j-m+2} & \dots & u_i & u_{i+1} & \dots & u_j & \\ & u_{j-m+2} & \dots & u_i & u_{i+1} & \dots & u_j & u_{j+1} \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots \\ & & & u_i & u_{i+1} & \dots & u_j & u_{j+1} & \dots & u_{i+m}. \end{array}$$

Θέτουμε  $l = m - j + i$  και θεωρούμε τις συμμετρικές πολυμομοπαράλληλικές απεικονίσεις  $g_i : \mathbb{A}^l \rightarrow \mathbb{A}^n$  και  $g_j : \mathbb{A}^l \rightarrow \mathbb{A}^n$  που ορίζονται από τις σχέσεις:

$$g_i(x_1, \dots, x_l) = f_i(x_1, \dots, x_l, u_{i+1}, \dots, u_j)$$

και

$$g_j(x_1, \dots, x_l) = f_j(x_1, \dots, x_l, u_{i+1}, \dots, u_j),$$

για κάθε  $(x_1, \dots, x_l) \in \mathbb{A}^l$ . Καθώς  $u_i < u_{i+1} \leq u_j$ , η ακολουθία των  $2l$  κόμβων  $u_{j-m+1}, \dots, u_i, u_{j+1}, \dots, u_{i+m}$  είναι προοδευτική. Επίσης, για  $k = 1, \dots, l$ , οι απεικονίσεις  $g_i$  και  $g_j$  παίρνουν την τιμή  $d_k$  στο σημείο  $(u_{j-m+k}, \dots, u_i, u_{j+1}, \dots, u_{j+k-1})$ . Επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση 7.1, έχουμε  $g_i = g_j$  και κατά συνέπεια οι τιμές των  $f_i$  και  $f_j$  συμπίπτουν σε κάθε σημείο του  $\mathbb{A}^m$  που μεταξύ των συντεταγμένων του βρίσκονται οι κόμβοι  $u_{i+1}, \dots, u_j$ . Άρα, η καμπύλη  $F$  που δημιουργείται από την ένωση των τμημάτων  $F_i([u_k, u_{k+1}])$  είναι B-spline.  $\square$

**Παρατήρηση 8.1.** Ας είναι  $u_i$  ένας κόμβος με  $u_i < u_{i+1}$ . Τότε, η ανισότητα  $k \leq i \leq k + m$  μας δίνει τα τμήματα των καμπυλών  $F_i$  τα οποία επηρεάζονται από το σημείο του de Boor  $d_k$ . Από την άλλη πλευρά, έχουμε  $i - m \leq k \leq i$  και έτσι βλέπουμε ποια σημεία του de Boor επηρεάζονται από το τμήμα  $F_i$ .

## 8.2 Ειδικές Ακολουθίες Κόμβων

Σ' αυτή την ενότητα θ' ασχοληθούμε με ειδικές κατηγορίες ακολουθιών κόμβων, τις κυκλικές και τις πεπερασμένες.

### 8.2.1 Κυκλικές Ακολουθίες Κόμβων

**Ορισμός 8.5.** Ας είναι  $L, N, T \in \mathbb{N}$  με  $L \geq 2$  και  $N \geq L$ . Μία κυκλική ακολουθία κόμβων περιόδου  $L$ , μήκος κύκλου  $N$  και μεγέθους περιόδου  $T$  είναι μία οικογένεια κόμβων  $U = (u_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  τέτοια, ώστε υπάρχει μία υπακολουθία  $u_{j+1}, \dots, u_{j+N}$  η οποία έχει ακριβώς  $L$  διαφορετικούς κόμβους με πολλαπλότητες  $n_1, \dots, n_L$ ,  $u_{j+N} < u_{j+N+1}$  και  $u_{k+N} = u_k + T$ , για κάθε  $k \in \mathbb{Z}$ .

Η κυκλική ακολουθία κόμβων  $U$ , περιόδου  $L$ , μήκος κύκλου  $N$  και μεγέθους περιόδου  $T$  έχει τη μορφή



$$\begin{array}{cccccc}
 \dots & u_{j+1} & u_{j+n_1+1} & \dots & u_{j+n_1+\dots+n_{L-1}+1} & u_{j+N+1} \\
 & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\
 & u_{j+n_1} & u_{j+n_1+n_2} & \dots & u_{j+N} & u_{j+N+n_1} \\
 & n_1 & n_2 & \dots & n_L & n_1
 \end{array}$$

όπου

$$n_1 + \dots + n_L = N, \quad u_N < u_{N+1}$$

και  $u_{i+N} = u_i + T$ , για κάθε  $i \in \mathbb{Z}$ . Πιο αναλυτικά, κάθε στήλη περιέχει διαδοχικούς ίσους κόμβους και στο τέλος της αναγράφεται η πολλαπλότητά τους.

**Παράδειγμα 8.5.** Μία κυκλική ακολουθία κόμβων με  $N = 8$ ,  $L = 5$  και  $T = 7$  δίνεται παρακάτω:

$$\dots, 0, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{5}, 7, 8, 8, 8, 9, 10, 10, 12, 14, 15, 15, 15, \dots$$

**Ορισμός 8.6.** Ας είναι  $U$  κυκλική ακολουθία κόμβων περιόδου  $L$ , μήκους κύκλου  $N$ , μεγέθους περιόδου  $T$  και βαθμού πολλαπλότητας  $\leq m$ . Καλούμε κυκλική  $B$ -spline καμπύλη βαθμού  $m$  επί της ακολουθίας  $U$  κάθε  $B$ -spline καμπύλη βαθμού  $m$  επί της  $U$ ,  $F: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^n$  ( $n \geq 2$ ) τέτοια, ώστε  $F_{i+N}(t+T) = F_i(t)$ , για κάθε  $t \in [u_i, u_{i+1}]$ .

Παρατηρούμε ότι αν  $F$  είναι μία κυκλική  $B$ -spline καμπύλη, τότε ισχύει  $F(u_{i+1}) = F_i(u_{i+1})$ . Πράγματι, καθώς τα τμήματα  $F_i([u_i, u_{i+1}])$  και  $F_{i+\pi(u_{i+1})}([u_{i+1}, u_{i+1+\pi(u_{i+1})}])$  ενώνονται με συνέχεια  $C^{m-\pi(u_{i+1})}$  στο  $u_{i+1}$  και  $\pi(u_{i+1}) \leq m$ , έχουμε:

$$F_i(u_{i+1}) = F_{i+\pi(u_{i+1})}(u_{i+1}) = F(u_{i+1}).$$

**Πρόταση 8.2.** Ας είναι  $U$  κυκλική ακολουθία κόμβων περιόδου  $L$ , μήκους κύκλου  $N$ , μεγέθους περιόδου  $T$  και βαθμού πολλαπλότητας  $\leq m$ . Αν  $F$  είναι μία κυκλική  $B$ -spline καμπύλη επί της  $U$ , τότε η οικογένεια των σημείων του de Boor,  $(d_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ , της  $F$  είναι περιοδική με περίοδο  $N$ , δηλαδή έχουμε  $d_{k+N} = d_k$ , για κάθε  $k \in \mathbb{Z}$ . Αντίστροφα, για κάθε περιοδική οικογένεια σημείων του  $\mathbb{A}^n$  ( $n \geq 2$ ),  $(d_k)_{k \in \mathbb{A}}$ , με περίοδο  $N$ , για κάθε  $k \in \mathbb{Z}$ , υπάρχει μία μοναδική κυκλική  $B$ -spline καμπύλη βαθμού  $m$  επί της  $U$ ,  $F: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^n$ , τέτοια, ώστε

$$d_k = f_i(u_{k+1}, \dots, u_{k+m}),$$

για κάθε  $k, i$  με  $u_i < u_{i+1}$  και  $k \leq i \leq k+m$ .

**Απόδειξη.** Από την Πρόταση 5.3 έχουμε ότι για κάθε  $x_1, \dots, x_m \in [u_i, u_{i+1}]$ , ισχύει

$$f_{i+N}(x_1+T, \dots, x_m+T) = f_i(x_1, \dots, x_m),$$

απ' όπου συνεπάγεται ότι η οικογένεια των σημείων του de Boor,  $(d_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ , της  $F$  είναι περιοδική με περίοδο  $N$ .

Σύμφωνα με το Θεώρημα 8.1, υπάρχει μία μοναδική  $B$ -spline καμπύλη  $F: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^n$  επί της  $U$  τέτοια, ώστε για κάθε ζεύγος δεικτών  $k, i$  με  $u_i < u_{i+1}$  και  $k \leq i \leq k+m$  η πολική μορφή  $f_i$  της καμπύλης  $F_i$  ικανοποιεί την ισότητα

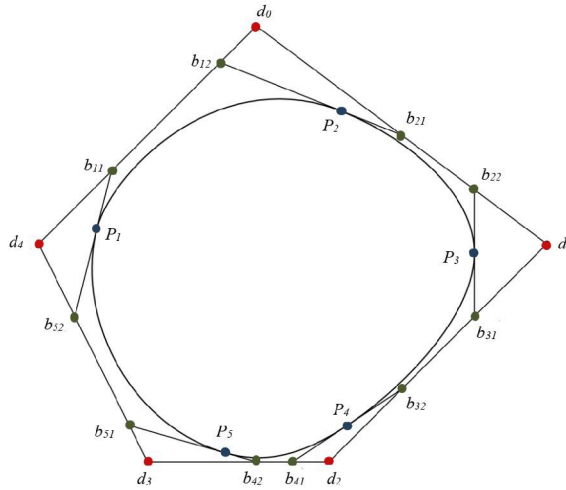
$$d_k = f_i(u_{k+1}, \dots, u_{k+m}).$$

Καθώς ισχύει  $d_k = d_{k+N}$ , από την Πρόταση 7.1 έπεται  $F_i(t) = F_{i+N}(t+T)$  και επομένως η  $F$  είναι κυκλική  $B$ -spline καμπύλη.  $\square$

Το επόμενο σχήμα παριστάνει μία κυβική κυκλική  $B$ -spline καμπύλη  $F$  επί της ακολουθίας

$$\dots, -3, -2, \mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, 9, 11, 12, \dots$$

η οποία έχει περίοδο  $L = 5$ , μήκος κύκλου  $N = 5$  και μέγεθος περιόδου  $T = 8$ . Ας είναι  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5$  οι περιορισμοί της  $F$  στα διαστήματα  $[1, 3]$ ,  $[3, 4]$ ,  $[4, 5]$ ,  $[5, 6]$ ,  $[6, 9]$ , αντίστοιχα. Επίσης, συμβολίζουμε, ως συνήθως, με  $f_i$  την πολική μορφή της  $F_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Τα σημεία της καμπύλης που αντιστοιχούν στους κόμβους  $1, 3, 4, 5, 6$  είναι τα  $P_1 = F_1(1)$ ,  $P_2 = F_2(3)$ ,  $P_3 = F_3(4)$ ,  $P_4 = F_4(5)$ ,  $P_5 = F_5(6)$ . Τα σημεία ελέγχου του de Boor της  $F$  είναι τα  $d_0 = f_1(1, 3, 4)$ ,  $d_1 = f_2(3, 4, 5)$ ,  $d_2 = f_3(4, 5, 6)$ ,  $d_3 = f_4(5, 6, 9)$ ,  $d_4 = f_5(6, 9, 11)$ . Επίσης, συμβολίζουμε με  $b_{i,1}$  και  $b_{i,2}$  τα σημεία ελέγχου του Bézier της  $F_i$ , εκτός των σημείων που αντιστοιχούν στα άκρα του διαστήματος.



Σχήμα 8.2: Κυβική κυκλική καμπύλη που αντιστοιχεί στην ακολουθία  $\dots, -3, -2, 1, 3, 4, 5, 6, 9, 11, 12, \dots$

**8.2.2 Πεπερασμένες Ακολουθίες Κόμβων**

**Ορισμός 8.7.** Ας είναι  $m$  και  $N$  ακέραιοι με  $m \geq 1$  και  $N \geq 0$ . Μία πεπερασμένη ακολουθία κόμβων βαθμού πολλαπλότητας  $\leq m + 1$  με  $N$  παρεμβαλλόμενους κόμβους είναι μία ακολουθία σημείων του  $\mathbb{A}$ ,  $(u_k)_{-m \leq k \leq N+m+1}$ , με  $u_i \leq u_{i+1}$ ,  $\pi(u_i) \leq m + 1$  ( $i = -m, \dots, N + m$ ) και  $u_{-m} < u_{N+m+1}$ ,  $\pi(u_{-m}) = \pi(u_{N+m+1}) = m + 1$ .

Ας είναι μία πεπερασμένη ακολουθία κόμβων βαθμού πολλαπλότητας  $\leq m + 1$  με  $N$  παρεμβαλλόμενους κόμβους,  $U = (u_k)_{-m \leq k \leq N+m+1}$ . Αν  $N = 0$ , τότε η ακολουθία αυτή αποτελείται από  $2(m + 1)$  κόμβους, όπου οι κόμβοι  $u_{-m}$  και  $u_{m+1}$  είναι διαφορετικοί και πολλαπλότητας  $m + 1$ . Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι  $N \geq 1$  και συμβολίζουμε με  $L - 1$  το πλήθος των διακεκριμένων κόμβων μεταξύ των  $u_1, \dots, u_N$  και με  $n_1, \dots, n_{L-1}$  τις πολλαπλότητές τους. Τότε, έχουμε  $N = n_1 + \dots + n_{L-1}$  και η ακολουθία  $U$  από  $L + 1$  διακεκριμένους κόμβους.

Ας είναι  $v_1, \dots, v_{L-1}$  οι  $L - 1$  διακεκριμένοι κόμβοι της ακολουθίας  $u_1, \dots, u_N$  γραμμένοι με τη σειρά εμφάνισής τους. Τότε,  $v_1 = u_1$  και  $v_i = u_{n_1 + \dots + n_{i-1} + 1}$  ( $i = 2, \dots, L - 1$ ). Οπότε, η ακολουθία  $U$  έχει την παρακάτω μορφή:

$$\underbrace{u_{-m}, \dots, u_0}_{m+1}, \underbrace{u_1, \dots, u_{n_1}}_{n_1}, \underbrace{u_{n_1+1}, \dots, u_{n_1+n_2}}_{n_2}, \dots, \underbrace{u_{N+1}, \dots, u_{N+m+1}}_{m+1},$$

όπου τα στοιχεία που βρίσκονται μέσα σε κάθε αγκύλη είναι ίσα.

**Παράδειγμα 8.6.** Η ακολουθία ακεραίων

$$2, 2, 2, 2, 0, 0, 1, 4, 5, 5, 6, 8, 8, 8, 8,$$

είναι μία πεπερασμένη ακολουθία βαθμού πολλαπλότητας  $\leq 4$  με 7 παρεμβαλλόμενους κόμβους.

**Ορισμός 8.8.** Μία κατά τμήματα πολωννμική καμπύλη βαθμού  $m$  επί της ακολουθία  $U$  είναι μία απεικόνιση  $F : [u_0, u_{N+1}] \rightarrow \mathbb{A}^n$  ( $n \geq 2$ ) τέτοια, ώστε για κάθε  $i = 0, n_1, n_1 + n_2, \dots, n_1 + \dots + n_{L-1} = N$  να υπάρχει πολωννμική καμπύλη  $F_i : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^n$  πολικού βαθμού  $m$  έτσι, ώστε ο περιορισμός της  $F$  επί του διαστήματος  $[u_i, u_{i+1}[$  να ισούται με την  $F_i$  ( $i = 0, n_1, n_1 + n_2, \dots, N - 1$ ) και ο περιορισμός της  $F$  επί του  $[u_N, u_{N+1}]$  με την  $F_N$ .

**Ορισμός 8.9.** Καλούμε καμπύλη  $B - spline$  βαθμού  $m$  επί της ακολουθίας  $U$  μία τμηματικά πολωννμική καμπύλη,  $F : [u_0, u_{N+1}] \rightarrow \mathbb{A}^n$  ( $n \geq 2$ ), τέτοια, ώστε τα τμήματα  $F_i([u_i, u_{i+1}])$  και  $F_{i+n_{i+1}}([u_{i+1}, u_{i+1+n_{i+1}}])$  να ενώνονται με παραμετρική συνέχεια  $C^{m-n_{i+1}}$  στο  $u_{i+1}$  ( $i = 0, n_1, n_1 + n_2, \dots, n_1 + \dots + n_{L-2}$ ).

Παρατηρούμε ότι η *B-spline* καμπύλη  $F$  αποτελείται από τμήματα των πολυωνυμικών καμπυλών  $F_0, F_{n_1}, F_{n_1+n_2}, \dots, F_N$  τα οποία ενώνονται επί των αντιστοιχων διαστημάτων με τρόπο ο οποίος ορίζεται από την πολλαπλότητα των σημείων της ακολουθίας κόμβων  $U$ . Επίσης, συμβολίζουμε με  $f_0, f_{n_1}, f_{n_1+n_2}, \dots, f_N$  τις πολικές μορφές των  $F_0, F_{n_1}, F_{n_1+n_2}, \dots, F_N$ , αντιστοίχα.

Η Πρόταση 8.1 μπορεί να προσαρμοστεί στην περίπτωση μίας πεπερασμένης ακολουθίας κόμβων ως εξής:

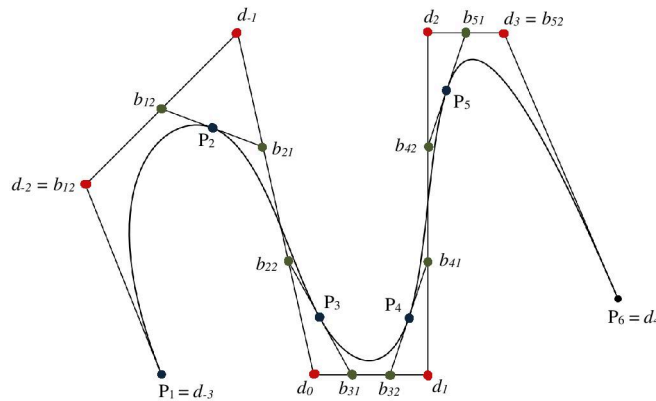
**Πρόταση 8.3.** Μία τμηματικά πολυωνυμική καμπύλη  $F$  πολικού βαθμού  $m$  επί της  $U$  είναι μία καμπύλη *B-spline*, αν και μόνον αν, για κάθε ζεύγος δεικτών  $i, j$  με  $-m \leq i < j \leq i + m \leq N, u_i < u_{i+1}, u_j < u_{j+1}$  και για κάθε  $x_1, \dots, x_{i+m-j} \in \mathbb{A}$  ισχύει:

$$f_i(x_1, \dots, x_{i+m-j}, u_{i+1}, \dots, u_j) = f_j(x_1, \dots, x_{i+m-j}, u_{i+1}, \dots, u_j).$$

Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη πρόταση μπορούμε να έχουμε ένα αποτέλεσμα για πεπερασμένες ακολουθίες κόμβων, ανάλογο με αυτό του Θεωρήματος 8.1, το οποίο δίνουμε παρακάτω.

**Θεώρημα 8.2.** Ας είναι  $d_{-m}, d_{-m+1}, \dots, d_N$  σημεία του  $\mathbb{A}^n$  ( $n \geq 2$ ). Τότε, υπάρχει μία μοναδική *B-spline* καμπύλη  $F : [u_0, u_{N+1}] \rightarrow \mathbb{A}^n$  επί της  $U$  τέτοια, ώστε για κάθε ζεύγος δεικτών  $k, i$  με  $u_i < u_{i+1}$  και  $-m \leq k \leq N$  και  $k \leq i \leq k + m$  ισχύει:

$$d_k = f_i(u_{k+1}, \dots, u_{k+m}).$$



Σχήμα 8.3: Κυβική καμπύλη που αντιστοιχεί στην ακολουθία 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 6.

Το παραπάνω σχήμα δείχνει μία κυβική *B-spline* καμπύλη  $F$  που αντιστοιχεί στην πεπερασμένη ακολουθία κόμβων

$$1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 6.$$

Συμβολίζουμε με  $f_i$  την πολική μορφή της καμπύλης  $F_i$  που αντιστοιχεί στο διάστημα  $[i + 1, i + 2]$  ( $i = 0, 1, 2, 3, 4$ ). Τα σημεία της  $F$  που αντιστοιχούν στους κόμβους 1, 2, 3, 4, 5 είναι τα  $P_{i+1} = F(u_i) = f_i(i + 1, i + 1, i + 1)$ , ( $i = 0, 1, 2, 3, 4$ ). Τα σημεία ελέγχου του de Boor, της  $F$  είναι:

$$\begin{aligned} d_{-3} &= f_0(1, 1, 1) = P_1, \\ d_{-2} &= f_0(1, 1, 2) = f_1(1, 1, 2), \\ d_{-1} &= f_0(1, 2, 3) = f_1(1, 2, 3) = f_2(1, 2, 3), \\ d_0 &= f_0(2, 3, 4) = f_1(2, 3, 4) = f_2(2, 3, 4) = f_3(2, 3, 4), \\ d_1 &= f_1(3, 4, 5) = f_2(3, 4, 5) = f_3(3, 4, 5) = f_4(3, 4, 5), \\ d_2 &= f_2(4, 5, 6) = f_3(4, 5, 6) = f_4(4, 5, 6), \\ d_3 &= f_3(5, 6, 6) = f_4(5, 6, 6), \\ d_4 &= f_4(6, 6, 6) = P_6. \end{aligned}$$

Τέλος, τα σημεία ελέγχου του Bézier της  $F_i$  εκτός των σημείων που αντιστοιχούν στα άκρα του διαστήματος  $[i + 1, i + 2]$  είναι τα  $b_{i+1,1}$  και  $b_{i+1,2}$  ( $i = 0, 1, 2, 3, 4$ ).

### 8.3 Σημεία και Κόμβοι

Ας είναι  $F$  μία B-spline καμπύλη βαθμού  $m$ , οποιασδήποτε μορφής από αυτές που είδαμε στην Ενότητα 4.1, επί μίας ακολουθίας κόμβων  $U = (u_k)$  και  $(d_k)$  η αντίστοιχη ακολουθία σημείων ελέγχου του de Boor. Σ' αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με τον υπολογισμό σημείων επί της  $F$ , την εισαγωγή κόμβων στην ακολουθία της και θα απαριθμήσουμε μερικές χρήσιμες ιδιότητες των B-spline καμπυλών.

#### 8.3.1 Υπολογισμός Σημείων

Για να υπολογίσουμε ένα σημείο  $F(t)$  της καμπύλης προσδιορίζουμε τον δείκτη  $J$  για τον οποίο ισχύει  $u_j \leq t < u_{j+1}$ . Η ακολουθία κόμβων  $u_{j-m+1}, \dots, u_{j+m}$  είναι προοδεντική και επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο του de Boor και τα σημεία  $d_{j-m}, \dots, d_j$  για τον υπολογισμό του σημείου  $F(t)$ .

Θέτουμε  $d_{i,0} = d_{i-1}$  ( $i = J - m + 1, \dots, J + 1 - r$ ), όπου  $r = \pi(u_j)$ , αν  $t = u_j$ , και  $r = 0$ , διαφορετικά. Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του de Boor, για κάθε  $j = 1, \dots, m - r$  υπολογίζουμε τα σημεία

$$d_{i,j} = \frac{u_{m+i-j} - t}{u_{m+i-j} - u_{i-1}} d_{i-1,j-1} + \frac{t - u_{i-1}}{u_{m+i-j} - u_{i-1}} d_{i,j-1},$$

όπου  $i = J - m + j + 1, \dots, J + 1 - r$ . Το τελευταίο σημείο που προκύπτει είναι το  $d_{J+1-r,m-r}$ . Ας είναι  $F_i$  η πολωννυμική καμπύλη που συμπίπτει με την  $F$  στο διάστημα  $[u_i, u_{i+1}]$  και  $f_i$  η πολική της μορφή. Αν  $t \neq u_j$ , τότε  $r = 0$  και επομένως

$$d_{J+1,m} = f_J(t, \dots, t) = F_J(t) = F(t).$$

Επίσης, αν  $t = u_j$ , τότε  $u_{j-r+1} = \dots = u_j$ , και επομένως έχουμε:

$$d_{J+1-r,m-r} = f_J(t, \dots, t, u_{j-r+1}, \dots, u_j) = f_j(t, \dots, t) = F_j(t) = F(t).$$

**Παράδειγμα 8.7.** Θεωρούμε την B-spline καμπύλη  $F : [1, 6] \rightarrow \mathbb{A}^2$  βαθμού τρία επί της πεπερασμένης ακολουθίας κόμβων

$$1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 6$$

και με σημεία ελέγχου του de Boor

$$d_{-3} = (2, 0), \quad d_{-2} = (0, 5), \quad d_{-1} = (4, 9), \quad d_0 = (6, 0),$$

$$d_1 = (9, 0), \quad d_2 = (9, 9), \quad d_3 = (11, 9), \quad d_4 = (14, 2).$$

Θα υπολογίσουμε το σημείο  $F(2)$ .

Έχουμε  $m = 3$ ,  $N = 4$  και

$$u_{-3} = u_{-2} = u_{-1} = u_0 = 1, \quad u_1 = 2, \quad u_2 = 3,$$

$$u_3 = 4, \quad u_4 = 5, \quad u_5 = u_6 = u_7 = u_8 = 6.$$

Για τον υπολογισμό του  $F(2)$  έχουμε  $J = 1$ ,  $r = 1$ , και επομένως ισχύει  $F(2) = d_{1,2}$ . Ακολουθώντας τον αλγόριθμο του de Boor, για  $i = -1, 0, 1$ , θέτουμε

$$d_{-1,0} = d_{-2} = (0, 5), \quad d_{0,0} = d_{-1} = (4, 9), \quad d_{1,0} = d_0 = (6, 0).$$

Έχουμε  $j = 1, 2$ . Ας είναι  $j = 1$ . Τότε  $i = 0, 1$  και υπολογίζουμε:

$$d_{0,1} = \frac{u_2 - 2}{u_2 - u_{-1}} d_{-1,0} + \frac{2 - u_{-1}}{u_2 - u_{-1}} d_{0,0} = \frac{3 - 2}{3 - 1} (0, 5) + \frac{2 - 1}{3 - 1} (4, 9) = (2, 7)$$

και

$$d_{1,1} = \frac{u_3 - 2}{u_3 - u_0} d_{0,0} + \frac{2 - u_0}{u_3 - u_0} d_{1,0} = \frac{4 - 2}{4 - 1} (4, 9) + \frac{2 - 1}{4 - 1} (6, 0) = \left(\frac{14}{3}, 6\right).$$

Στη συνέχεια, ας είναι  $j = 2$ . Τότε, έχουμε  $i = 1$  και υπολογίζουμε:

$$d_{1,2} = \frac{u_2 - 2}{u_2 - u_0} d_{0,1} + \frac{2 - u_0}{u_2 - u_0} d_{1,1} = \frac{3 - 2}{3 - 1} (2, 7) + \frac{2 - 1}{3 - 1} \left(\frac{14}{3}, 6\right) = \left(\frac{10}{3}, \frac{13}{2}\right).$$

### 8.3.2 Εισαγωγή Κόμβων

Η εισαγωγή κόμβων σε ακολουθία κόμβων μίας καμπύλης B-spline είναι μία βασική διαδικασία και συνήθως χρησιμοποιείται για να δώσει μεγαλύτερη ευελιξία στην καμπύλη. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να εισάγουμε τον κόμβο  $w$  στην ακολουθία κόμβων  $U$ . Προσδιορίζουμε τον δείκτη  $J$  για τον οποίο ισχύει  $u_J \leq t < u_{J+1}$  και έτσι προκύπτει η ακολουθία κόμβων  $(v_k)$ , όπου  $v_k = u_k$ , για κάθε  $k \leq J$ ,  $v_{J+1} = w$  και  $v_{k+1} = u_k$ , για κάθε  $k \geq J+1$ . Τότε τα σημεία ελέγχου που αντιστοιχούν στις ακολουθίες  $u_{J-m+k+1}, \dots, u_{J+k}$ , με  $1 \leq k \leq m-1-r$ , οι οποίες περιέχουν τα  $u_J$  και  $u_{J+1}$ . Από την άλλη πλευρά, έχουμε να υπολογίσουμε τα  $m-r$  καινούρια σημεία ελέγχου

$$f_i(v_{J-m+k+1}, \dots, v_{J+1}, \dots, v_{J+k}), \quad (k = 1, \dots, m-r),$$

όπου  $i$  είναι οποιοσδήποτε ακέραιος τέτοιος, ώστε  $J-m+k \leq i \leq J+k$ . Για παράδειγμα, αν στην ακολουθία κόμβων  $\dots, 4, 5, 6, 9, 10, \dots$  μίας καμπύλης B-spline τρίτου βαθμού εισάγουμε τον κόμβο 8, τότε έχουμε να υπολογίσουμε τα σημεία ελέγχου τα οποία αντιστοιχούν στις τριάδες (5, 6, 8), (6, 8, 9) και (8, 9, 10). Ο υπολογισμός αυτός θα γίνει όπως και παραπάνω με τον αλγόριθμο του de Boor. Έτσι, θεωρούμε τα σημεία  $d_{i,0}$  ( $i = J-m+1, \dots, J+1-r$ ) και για  $i = J-m+2, \dots, J+1-r$  υπολογίζουμε τα σημεία

$$d_{i,1} = \frac{u_{m+i-1} - w}{u_{m+i-1} - u_{i-1}} d_{i-1,0} + \frac{w - u_{i-1}}{u_{m+i-1} - u_{i-1}} d_{i,0}$$

τα οποία είναι τα καινούρια σημεία ελέγχου και αντικαθιστούν τα σημεία  $d_{J-m+1}, \dots, d_{J-1}$ .

**Παράδειγμα 8.8.** Θεωρούμε την καμπύλη του προηγούμενου παραδείγματος. Θα εισάγουμε στην ακολουθία κόμβων της τον κόμβο 3.5 δύο φορές.

Έχουμε  $J = 2$  και  $r = 0$ . Θεωρούμε τα σημεία

$$d_{0,0} = d_{-1} = (4, 9), \quad d_{1,0} = d_0 = (6, 0), \quad d_{2,0} = d_1 = (9, 0), \quad d_{3,0} = d_2 = (9, 9)$$

και υπολογίζουμε

$$d_{1,1} = \frac{u_3 - 3.5}{u_3 - u_0} d_{0,0} + \frac{3.5 - u_0}{u_3 - u_0} d_{1,0} = \frac{4 - 3.5}{4 - 1} (4, 9) + \frac{3.5 - 1}{4 - 1} (6, 0) = \left(\frac{17}{3}, \frac{3}{2}\right),$$

$$d_{2,1} = \frac{u_4 - 3.5}{u_4 - u_1} d_{1,0} + \frac{3.5 - u_1}{u_4 - u_1} d_{2,0} = \frac{5 - 3.5}{5 - 2} (6, 0) + \frac{3.5 - 2}{5 - 2} (9, 0) = \left(\frac{15}{2}, 0\right),$$

$$d_{3,1} = \frac{u_5 - 3.5}{u_5 - u_2} d_{2,0} + \frac{3.5 - u_2}{u_5 - u_2} d_{3,0} = \frac{6 - 3.5}{6 - 3} (9, 0) + \frac{3.5 - 3}{6 - 3} (9, 9) = \left(9, \frac{3}{2}\right).$$

Μετά την προσθήκη του καινούριου κόμβου 3.5 στην ακολουθία, τα σημεία ελέγχου  $d_0$  και  $d_1$  αντικαθίστανται από τα  $d_{1,1}$ ,  $d_{2,1}$  και  $d_{3,1}$ .

Έτσι, προκύπτει η ακολουθία κόμβων  $v_{-3}, \dots, v_9$  με  $v_i = u_i$  για  $i = -3, \dots, 2$ ,  $v_3 = 3.5$ ,  $v_{i+1} = u_i$  για  $i = 3, \dots, 8$ . Η αντίστοιχη ακολουθία σημείων ελέγχου του de Boor είναι η ακολουθία  $\delta_{-3}, \dots, \delta_5$ , όπου  $\delta_i = d_i$  ( $i = -3, -2, -1$ ),  $\delta_{i-1} = d_{i,1}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) και  $\delta_{i+1} = d_i$  ( $i = 2, 3, 4$ ).

Στη συνέχεια θα εισάγουμε στην ακολουθία  $(v_i)$  τον κόμβο 3.5. Τότε, έχουμε  $J = 3$  και  $r = 1$ . Θεωρούμε τα σημεία

$$\delta_{1,0} = \delta_0 = \left(\frac{17}{3}, \frac{3}{2}\right), \quad \delta_{2,0} = \delta_1 = \left(\frac{15}{2}, 0\right), \quad \delta_{3,0} = \delta_2 = \left(9, \frac{3}{2}\right)$$

και υπολογίζουμε

$$\delta_{2,1} = \frac{v_4 - 3.5}{v_4 - v_1} \delta_{1,0} + \frac{3.5 - v_1}{v_4 - v_1} \delta_{2,0} = \left(\frac{169}{24}, \frac{3}{8}\right),$$

$$\delta_{3,1} = \frac{v_5 - 3.5}{v_5 - v_2} \delta_{2,0} + \frac{3.5 - v_2}{v_5 - v_2} \delta_{3,0} = \left(\frac{63}{8}, \frac{3}{8}\right).$$

Μετά την προσθήκη του καινούριου κόμβου 3.5 στην ακολουθία, το σημείο ελέγχου  $\delta_1$  αντικαθίσταται από τα  $\delta_{2,1}$  και  $\delta_{3,1}$ .

### 8.3.3 Ιδιότητες των $B$ -spline Καμπυλών

Οι  $B$ -spline καμπύλες έχουν σημαντικές ιδιότητες οι οποίες προέρχονται από τις ιδιότητες της μορφής του Bézier. Παραθέτουμε μερικές από αυτές παρακάτω.

**Τοπικός Έλεγχος:** Η αλλαγή ενός σημείου του de Boor της  $F$  επηρεάζει μόνο  $m + 1$  συνεχόμενα τμήματά της και όχι ολόκληρη την καμπύλη.

**Παρεμβολή Ακραίων Σημείων:** Στην περίπτωση όπου η  $F$  είναι μία πεπερασμένη  $B$ -spline καμπύλη βαθμού  $m$ , η καμπύλη  $F$  διέρχεται από το πρώτο και το τελευταίο σημείο του de Boor.

**Γραμμική Ακρίβεια:** Αν τα σημεία ελέγχου είναι συνευθειακά, τότε από την εφαρμογή του αλγορίθμου του de Boor για τον υπολογισμό των σημείων της  $F$  βλέπουμε ότι από αυτά διέρχεται μία ευθεία.

**Αναλλοίωτη σε Ομοπαράλληλους Απεικονίσεις:** Καθώς είδαμε παραπάνω, για την εύρεση του σημείου  $F(t)$  με τον αλγόριθμο του de Boor, υπολογίζουμε τα σημεία  $d_{i,j}$  ως βαρύκεντρα των σημείων  $d_{i-1,j-1}$  και  $d_{i,j-1}$ . Έτσι, αν  $\alpha$  είναι μία ομοπαράλληλη απεικόνιση, τότε το σημείο  $\alpha(F(t))$  προσδιορίζεται μετά τον υπολογισμό των αντίστοιχων βαρυκέντρων των  $\alpha(d_{i-1,j-1})$  και  $\alpha(d_{i,j-1})$ . Δηλαδή για να μετασχηματίσουμε την  $F$ , με την απεικόνιση  $\alpha$ , αρκεί να εφαρμόσουμε την  $\alpha$  στα σημεία ελέγχου της  $F$ .

**Ιδιότητα του Κυρτού Καλύμματος:** Κάθε σημείο της  $F$  ανήκει στο κυρτό κάλυμμα  $m + 1$  γειτονικών σημείων ελέγχου.

**Αύξηση Βαθμού:** Η καμπύλη  $F$  μπορεί να χαρακτηριστεί ως καμπύλη πολικού βαθμού  $m + 1$ . Για να γίνει αυτό, πρώτα αυξάνουμε την πολλαπλότητα κάθε κόμβου της ακολουθίας  $U$  κατά ένα και έτσι προκύπτει μία νέα ακολουθία κόμβων  $V = (v_k)$ . Για κάθε δείκτη  $k$  με  $v_k < v_{k+1}$  θέτουμε

$$g_k(t_1, \dots, t_{m+1}) = \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^{m+1} f_k(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_{m+1}).$$

Για κάθε  $t \in [v_k, v_{k+1}]$  ισχύει:

$$g_k(t, \dots, t) = f_k(t, \dots, t) = F_k(t).$$

Έτσι, η απεικόνιση  $g_k$  είναι μία  $m + 1$ -πολική μορφή της  $F_k$ . Επίσης, τα αντίστοιχα σημεία ελέγχου του de Boor ( $\vec{d}_k$ ) δίνονται από τις σχέσεις:

$$\vec{d}_k = g_i(v_{k+1}, \dots, v_{k+m+1}),$$

όπου  $k \leq i \leq k + m + 1$ . Τέλος, ας σημειωθεί ότι η αύξηση της πολλαπλότητας κάθε κόμβου κατά ένα είναι απαραίτητη, ώστε να διατηρηθεί η ίδια τάξη παραμετρικής συνέχειας.

### 8.4 $B$ -spline συναρτήσεις

Ας είναι  $U = (u_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  μία ακολουθία κόμβων και  $j$  ένας ακέραιος. Σύμφωνα με το Θεώρημα 8.1, υπάρχει μία μοναδική  $B$ -spline καμπύλη  $\mathcal{N}_{j,i}^m : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^2$  επί της  $U$  τέτοια, ώστε για κάθε ζεύγος δεικτών  $k, i$  με  $u_i < u_{i+1}$  και  $k \leq i \leq k + m$ , η πολική μορφή  $n_{j,i}^m$  της καμπύλης  $\mathcal{N}_{j,i}^m$  ικανοποιεί την ισότητα

$$n_{j,i}^m(u_{k+1}, \dots, u_{k+m}) = (\delta_{k,j}, 0),$$

όπου  $\delta_{j,j} = 1$  και  $\delta_{k,j} = 0$  για  $k \neq j$ . Καθώς τα σημεία  $(\delta_{k,j}, 0)$  ανήκουν στο σύνολο  $\mathbb{A} \times \{0\}$ , από τον αλγόριθμο του de Boor, έπεται ότι οι τιμές της πολικής μορφής  $n_{j,i}^m$  ανήκουν στο  $\mathbb{A} \times \{0\}$  το οποίο ταυτίζουμε με το  $\mathbb{A}$

(αντιστοιχίζοντας τα σημεία  $(x, 0)$  με τα  $x$ ). Έτσι, έχουμε τις απεικονίσεις  $n_{j,i}^m : \mathbb{A}^m \rightarrow \mathbb{A}$  με

$$n_{j,i}^m(u_{k+1}, \dots, u_{k+m}) = \delta_{j,k} \quad (i = k, \dots, k+m)$$

και  $\mathcal{N}_{j,i}^m : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  η οποία δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{N}_{j,i}^m(t) = n_{j,i}^m(t, \dots, t), \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{A}.$$

Ο υπολογισμός της τιμής  $\mathcal{N}_{j,i}^m(t)$  για  $t \in \mathbb{A}$ , όπως είδαμε στην Ενότητα 4.3, πραγματοποιείται με τον υπολογισμό βαρυκέντρων ζευγών σημείων ελέγχου. Έτσι, αν  $J$  είναι ο δείκτης με  $u_J \leq t < u_{J+1}$  και ισχύει  $j \notin \{J-m, \dots, J\}$ , τότε  $\mathcal{N}_{j,i}^m(t) = 0$ . Επίσης, αν  $u_j < u_{j+1}$ , τότε ορίζουμε την απεικόνιση  $\mathcal{N}_j^0 : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  από τη σχέση

$$\mathcal{N}_j^0(t) = \begin{cases} 1, & \text{αν } t \in [u_j, u_{j+1}[ \\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού.} \end{cases}$$

**Ορισμός 8.10.** Η συνάρτηση  $\mathcal{N}_{j,i}^m$  καλείται *βασική B-spline συνάρτηση βαθμού  $m$  επί της ακολουθίας  $U$* .

Ας είναι τώρα  $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^n$  μία B-spline καμπύλη βαθμού  $m$  επί της ακολουθίας  $U$  και  $(d_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  η αντίστοιχη ακολουθία σημείων ελέγχου του de Boor. Ας είναι δείκτης  $i$  με  $u_i < u_{i+1}$  και  $F_i : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^n$  η αντίστοιχη πολυωνυμική απεικόνιση. Θεωρούμε την πολυνομοπαραλληλική απεικόνιση  $f_i : \mathbb{A}^m \rightarrow \mathbb{A}^n$  η οποία ορίζεται από τη σχέση

$$f_i(t_1, \dots, t_m) = \sum_j n_{j,i}^m(t_1, \dots, t_m) d_j.$$

Ας είναι  $k$  ακέραιος. Για κάθε ακέραιο  $i$  με  $k \leq i \leq k+m$  έχουμε:

$$g_i(u_{k+1}, \dots, u_{k+m}) = \sum_j n_{j,i}^m(u_{k+1}, \dots, u_{k+m}) d_j = \sum_j \delta_{j,k} d_j = d_k.$$

Τότε, από το Θεώρημα 8.1 έπεται ότι για κάθε  $t \in [u_i, u_{i+1}[$  ισχύει:

$$F_i(t) = \sum_j \mathcal{N}_{j,i}^m(t) d_j.$$

Συνεπώς, έχουμε το παρακάτω θεώρημα:

**Θεώρημα 8.3.** Ας είναι  $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^n$  μία B-spline καμπύλη βαθμού  $m$  επί της ακολουθίας  $U$  και  $(d_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  η αντίστοιχη ακολουθία σημείων ελέγχου του de Boor. Τότε, για κάθε  $t \in [u_i, u_{i+1}[$ , όπου  $u_i < u_{i+1}$ , ισχύει:

$$F_i(t) = \sum_j \mathcal{N}_{j,i}^m(t) d_j.$$

Στη συνέχεια θα δώσουμε έναν αναδρομικό τύπο για τον υπολογισμό της συνάρτησης  $n_{j,i}^m$  και επομένως για την  $\mathcal{N}_{j,i}^m$ . Ας είναι  $m = 1$ . Τότε, έχουμε

$$n_{j,j}^1(u_{j+1}) = 1 \quad \text{και} \quad n_{j,j}^1(u_j) = 0.$$

Η απεικόνιση  $n_{j,j}^1$  είναι ομοπαραλληλική και επομένως υπάρχουν  $a, b \in \mathbb{R}$  έτσι, ώστε για κάθε  $t \in \mathbb{A}$  να ισχύει  $n_{j,j}^1(t) = at + b$ . Επομένως, έχουμε:

$$au_{j+1} + b = 1 \quad \text{και} \quad au_j + b = 0.$$

Έτσι, παίρνουμε:

$$n_{j,j}^1(t) = \frac{t - u_j}{u_{j+1} - u_j}.$$

Ομοίως, έχουμε  $n_{j,j+1}^1(u_{j+1}) = 1$  και  $n_{j,j+1}^1(u_{j+2}) = 0$ , απ' όπου παίρνουμε ότι για κάθε  $t \in \mathbb{A}$  ισχύει

$$n_{j,j+1}^1(t) = \frac{u_{j+2} - t}{u_{j+2} - u_{j+1}}.$$

Από την άλλη πλευρά, για κάθε ακέραιο  $k \neq j, j+1$  έχουμε

$$n_{j,k}^1(u_{k+1}) = n_{j,k}^1(u_k) = 0,$$

απ' όπου έπεται ότι  $n_{j,k}^1 = 0$ . Έτσι, παίρνουμε:

$$n_{j,k}^1(t) = \frac{t - u_j}{u_{j+1} - u_j} \delta_{j,k} + \frac{u_{j+2} - t}{u_{j+2} - u_{j+1}} \delta_{j+1,k}.$$

Καθώς ισχύει  $\mathcal{N}_{j,i}^1 = n_{j,i}^1$ , η B-spline καμπύλη  $\mathcal{N}_j^1$  δίνεται από τον τύπο:

$$\mathcal{N}_j^1(t) = \begin{cases} \frac{t - u_j}{u_{j+1} - u_j}, & \text{αν } t \in [u_j, u_{j+1}[, \\ \frac{u_{j+2} - t}{u_{j+2} - u_{j+1}}, & \text{αν, } t \in [u_{j+1}, u_{j+2}[, \\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού.} \end{cases}$$

Οπότε, μπορούμε να γράψουμε την απεικόνιση  $\mathcal{N}_j^1$  ως εξής:

$$\mathcal{N}_j^1(t) = \frac{t - u_j}{u_{j+1} - u_j} \mathcal{N}_j^0(t) + \frac{u_{j+2} - t}{u_{j+2} - u_{j+1}} \mathcal{N}_{j+1}^0(t).$$

Ας σημειωθεί ότι συναντήσαμε αυτές τις απεικονίσεις στο Παράδειγμα 8.2 όπου κατασκευάσαμε μία B-spline καμπύλη βαθμού 1.

Θέτουμε  $n_{j,k}^0 = \delta_{k,j}$ . Θα δείξουμε ότι ισχύει:

$$n_{j,k}^m(t_1, \dots, t_m) = \frac{t_m - u_j}{u_{j+m} - u_j} n_{j,k}^{m-1}(t_1, \dots, t_{m-1}) + \frac{u_{j+m+1} - t_m}{u_{j+m+1} - u_{j+1}} n_{j+1,k}^{m-1}(t_1, \dots, t_{m-1}).$$

Επίσης, για κάθε ζεύγος δεικτών  $j, k$  με  $k \neq j, \dots, j+m$ , έχουμε

$$n_{j,k}^m(t_1, \dots, t_m) = 0.$$

Για  $m = 1$ , έχουμε δείξει ότι αυτές οι σχέσεις ισχύουν. Υποθέτουμε ότι ισχύουν για  $m = \mu - 1$  και θα δείξουμε ότι ισχύουν για  $m = \mu$ . Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\phi_{j,k}^\mu(t_1, \dots, t_\mu) = \frac{t_\mu - u_j}{u_{j+\mu} - u_j} n_{j,k}^{\mu-1}(t_1, \dots, t_{\mu-1}) + \frac{u_{j+\mu+1} - t_\mu}{u_{j+\mu+1} - u_{j+1}} n_{j+1,k}^{\mu-1}(t_1, \dots, t_{\mu-1}).$$

Από την υπόθεση της επαγωγής, για κάθε  $k \neq j, \dots, j+\mu$ , ισχύει

$$n_{j,k}^{\mu-1}(t_1, \dots, t_{\mu-1}) = n_{j+1,k}^{\mu-1}(t_1, \dots, t_{\mu-1}) = 0$$

και επομένως για κάθε  $k \neq j, \dots, j+\mu$  έχουμε  $\phi_{j,k}^\mu(t_1, \dots, t_\mu) = 0$ . Επιπλέον, για  $k = j, \dots, j+\mu-1$  ισχύει

$$n_{j,k}^{\mu-1}(u_{j+1}, \dots, u_{j+\mu-1}) = 1 \quad \text{και} \quad n_{j+1,k}^{\mu-1}(u_{j+1}, \dots, u_{j+\mu-1}) = 0,$$



απ' όπου έπεται:

$$\phi_{j,k}^{\mu}(u_{j+1}, \dots, u_{j+\mu}) = 1 \quad (k = j, \dots, j + \mu - 1).$$

Επίσης, καθώς  $n_{j,j+\mu}^{\mu-1} = 0$ , παίρνουμε:

$$\phi_{j,j+\mu}^{\mu}(u_{j+1}, \dots, u_{j+\mu}) = \frac{u_{j+\mu+1} - u_{j+\mu}}{u_{j+\mu+1} - u_{j+1}} n_{j+1,j+\mu}^{\mu-1}(u_{j+1}, \dots, u_{j+\mu-1}).$$

Από την άλλη πλευρά, ισχύει  $n_{j+1,j+\mu}^{\mu-2} = 0$  και επομένως έχουμε:

$$n_{j+1,j+\mu}^{\mu-1}(t_1, \dots, t_{\mu-1}) = \frac{u_{j+\mu+1} - t_{\mu-1}}{u_{j+\mu+1} - u_{j+2}} n_{j+2,j+\mu}^{\mu-2}(t_1, \dots, t_{\mu-2}).$$

Θεωρούμε την απεικόνιση

$$f(t) = n_{j+1,j+\mu}^{\mu-1}(t, u_{j+2}, \dots, u_{j+\mu-1}).$$

Καθώς ισχύει  $f(u_{j+\mu+1}) = 0$  και  $f(u_{j+\mu}) = 1$ , έχουμε

$$f(t) = \frac{t - u_{j+\mu+1}}{u_{j+\mu} - u_{j+\mu+1}}.$$

Επομένως, προκύπτει:

$$n_{j+1,j+\mu}^{\mu-1}(u_{j+1}, \dots, u_{j+\mu-1}) = \frac{u_{j+1} - u_{j+\mu+1}}{u_{j+\mu} - u_{j+\mu+1}}.$$

Έτσι, παίρνουμε  $\phi_{j,j+\mu}^{\mu}(u_{j+1}, \dots, u_{j+\mu}) = 1$ . Στη συνέχεια, το Θεώρημα 8.1 μας δίνει ότι  $\phi_{j,k}^{\mu} = n_{j,k}^{\mu}$ , απ' όπου έπεται η ζητούμενη έκφραση για την απεικόνιση  $n_{j,k}^{\mu}$ . Άμεση συνέπεια αυτού του αποτελέσματος είναι ο εξής τύπος:

$$\mathcal{N}_j^m(t) = \frac{t - u_j}{u_{j+m} - u_j} \mathcal{N}_j^{m-1}(t) + \frac{u_{j+m+1} - t}{u_{j+m+1} - u_{j+1}} \mathcal{N}_{j+1}^{m-1}(t).$$

Συνοψίζουμε τα παραπάνω στο επόμενο θεώρημα:

**Θεώρημα 8.4.** *Ας είναι  $n_{j,k}^0 = \delta_{k,j}$  και*

$$\mathcal{N}_j^0(t) = \begin{cases} 1, & \text{αν } t \in [u_j, u_{j+1}[ \\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού.} \end{cases}$$

Τότε, έχουμε:

$$n_{j,k}^m(t_1, \dots, t_m) = \frac{t_m - u_j}{u_{j+m} - u_j} n_{j,k}^{m-1}(t_1, \dots, t_{m-1}) + \frac{u_{j+m+1} - t_m}{u_{j+m+1} - u_{j+1}} n_{j+1,k}^{m-1}(t_1, \dots, t_{m-1})$$

και

$$\mathcal{N}_j^m(t) = \frac{t - u_j}{u_{j+m} - u_j} \mathcal{N}_j^{m-1}(t) + \frac{u_{j+m+1} - t}{u_{j+m+1} - u_{j+1}} \mathcal{N}_{j+1}^{m-1}(t).$$

Επίσης, για κάθε ζεύγος δεικτών  $j, k$  με  $k \neq j, \dots, j + m$ , ισχύει  $n_{j,k}^m = 0$  και επομένως  $\mathcal{N}_{j,k}^m = 0$ .

Ας είναι  $U = (u_k)_{-m \leq k \leq N+m+1}$  μία πεπερασμένη ακολουθία κόμβων βαθμού πολλαπλότητας  $\leq m + 1$  με  $N$  παρεμβλλόμενους κόμβους και  $j \in \{-m, \dots, N\}$ . Από το Θεώρημα 8.2 συνεπάγεται, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, ότι υπάρχει μία μοναδική B-spline καμπύλη  $\mathcal{N}_j^m : [u_0, u_{N+1}] \rightarrow \mathbb{A}^2$  επί της  $U$  τέτοια, ώστε

για κάθε ζεύγος δεικτών  $k, i$  με  $u_i < u_{i+1}$  και  $k \leq i \leq k + m$ , η πολική μορφή  $n_{j,i}^m$  της καμπύλης  $\mathcal{N}_{j,i}^m$  ικανοποιεί την ισότητα

$$n_{j,i}^m(u_{k+1}, \dots, u_{k+m}) = (\delta_{k,j}, 0).$$

Οι τιμές της μορφής  $n_{j,i}^m$  ανήκουν στο  $\mathbb{A} \times \{0\}$  το οποίο ταυτίζουμε με το  $\mathbb{A}$  και έτσι, όπως και προηγουμένως, έχουμε τις απεικονίσεις  $n_{j,i}^m : \mathbb{A}^m \rightarrow \mathbb{A}$  με  $n_{j,i}^m(u_{k+1}, \dots, u_{k+m}) = \delta_{j,k}$  ( $i = k, \dots, k + m$ ) και  $\mathcal{N}_{j,i}^m : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  με  $\mathcal{N}_{j,i}^m(t) = n_{j,i}^m(t, \dots, t)$ , για κάθε  $t \in \mathbb{A}$ . Η συνάρτηση  $\mathcal{N}_{j,i}^m$  καλείται επίσης βασική B-spline συνάρτηση βαθμού  $m$  επί της ακολουθίας  $U$ . Επιπλέον, όπως και στην περίπτωση της άπειρης ακολουθίας κόμβων, μπορούμε να εκφράσουμε μία B-spline καμπύλη επί της ακολουθίας  $U$  με τη βοήθεια των συναρτήσεων  $\mathcal{N}_{j,i}^m(t)$ . Έτσι, έχουμε το παρακάτω θεώρημα:

**Θεώρημα 8.5.** *Ας είναι  $F : [u_0, u_{N+1}] \rightarrow \mathbb{A}^n$  μία B-spline καμπύλη βαθμού  $m$  επί της ακολουθίας  $U$  και  $d_{-m}, d_{-m+1}, \dots, d_N$  η ακολουθία σημείων ελέγχου του de Boor της  $F$ . Τότε, για κάθε  $t \in [u_i, u_{i+1}[$ , όπου  $u_i < u_{i+1}$ , ισχύει:*

$$F_i(t) = \sum_{j=-m}^N \mathcal{N}_{j,i}^m(t) d_j.$$

Τέλος, ορίζουμε, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, τις συναρτήσεις  $n_{j,k}^0 = \delta_{k,j}$  και

$$\mathcal{N}_j^0(t) = \begin{cases} 1, & \text{αν } t \in [u_j, u_{j+1}[ \\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

και συμπεραίνουμε ότι οι συναρτήσεις  $n_{j,k}^m$  και  $\mathcal{N}_{j,k}^m$  έχουν τις ιδιότητες που περιγράφονται στο Θεώρημα 8.4.

**Ασκήσεις**

**8.4.1** Θεωρούμε την B-spline καμπύλη  $F : [0, 5] \rightarrow \mathbb{A}^2$  βαθμού δύο επί της πεπερασμένης ακολουθίας κόμβων

$$0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5$$

και με σημεία ελέγχου του de Boor

$$d_{-2} = (-6, -1), \quad d_{-1} = (-5, 2), \quad d_0 = (-3, 3), \quad d_1 = (-1, 2),$$

$$d_2 = (0, 0), \quad d_3 = (3, 1), \quad d_4 = (3, 3), \quad d_5 = (1, 5).$$

Να υπολογιστούν τα σημεία  $F(1), F(2), F(3)$ . Επίσης, να υπολογιστεί το σημείο  $F(5/4)$  καθώς και η εφαπτομένη της καμπύλης σ' αυτό.

**8.4.2** Θεωρούμε την πεπερασμένη ακολουθία κόμβων

$$0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4.$$

Να βρεθούν οι βασικές B-spline συνάρτησεις  $\mathcal{N}_{-1}^3, \mathcal{N}_0^3$  και  $\mathcal{N}_1^3$  επί αυτής της ακολουθίας.

**8.4.3** Ας είναι  $F$  η κυβική B-spline καμπύλη που ορίζεται από την πεπερασμένη ακολουθία κόμβων

$$0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2$$

και τα σημεία ελέγχου του de Boor

$$d_{-3} = (1, 0, 0), \quad d_{-2} = (2, 0, 1), \quad d_{-1} = (2, 1, 2), \quad d_0 = (3, 1, 1), \quad d_1 = (4, 2, 3).$$

Να υπολογιστεί η απεικόνιση  $F : [0, 2] \rightarrow \mathbb{A}^3$ .

8.4.4 Ας είναι  $F$  η κυβική B-spline καμπύλη που ορίζεται από την πεπερασμένη ακολουθία κόμβων

$$0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3, 3$$

και τα σημεία ελέγχου του de Boor

$$d_{-3} = (1, 0, 1), \quad d_2 = (2, 1, 1), \quad d_{-1} = (3, 0, 2),$$

$$d_0 = (4, 1, 2), \quad d_1 = (4, 2, 3), \quad d_2 = (5, 3, 1).$$

Να αυξηθεί ο βαθμός της  $F$ , δηλαδή να υπολογιστεί η ακολουθία κόμβων και τα σημεία ελέγχου του de Boor, ώστε η  $F$  να χαρακτηρίζεται ως B-spline καμπύλη βαθμού τέσσερα.

8.4.5 Θεωρούμε την B-spline καμπύλη  $F : [1, 5] \rightarrow \mathbb{A}^2$  βαθμού τρία επί της πεπερασμένης ακολουθίας κόμβων

$$1, 1, 1, 1, 2, 4, 5, 5, 5, 5$$

και με σημεία ελέγχου του de Boor

$$d_{-3} = (2, 0), \quad d_{-2} = (0, 5), \quad d_{-1} = (4, 9), \quad d_0 = (6, 0),$$

$$d_1 = (9, 0), \quad d_2 = (9, 9), \quad d_3 = (11, 9), \quad d_4 = (14, 2).$$

Να εισαχθεί ο κόμβος 3 τρεις φορές.

8.4.6 Ας είναι μία πεπερασμένη ακολουθία κόμβων βαθμού πολλαπλότητας  $\leq m+1$  με  $N$  παρεμβαλλόμενους κόμβους,  $U = (u_k)_{-m \leq k \leq N+m+1}$  και  $\mathcal{N}_j^m$  ( $j = -m, \dots, N$ ) οι βασικές B-spline συναρτήσεις βαθμού  $m$  επί της  $U$ . Θεωρούμε ένα σημείο  $\hat{u} \in [u_s, u_{s+1}]$  ( $u_s < u_{s+1}$ ) και συμβολίζουμε με  $\hat{\mathcal{N}}_j^m$  οι βασικές B-spline συναρτήσεις βαθμού  $m$  επί της ακολουθίας  $\hat{U} = (\hat{u}_k)_{-m \leq k \leq N+m+2}$  η οποία προκύπτει από την  $U$  με την πρόσθεση σ' αυτή του κόμβου  $\hat{u}$ . Να δειχθούν τα εξής:

α) Αν  $-m \leq j \leq s - 2m - 1$ , τότε ισχύει  $\mathcal{N}_j^m(t) = \hat{\mathcal{N}}_j^m(t)$ .

β) Αν  $s - 2m \leq j \leq s$ , τότε ισχύει

$$\mathcal{N}_j^m(t) = \frac{t - \hat{u}_j}{\hat{u}_{j+m+1} - \hat{u}_j} \hat{\mathcal{N}}_j^m(t) + \frac{\hat{u}_{j+m+2} - t}{\hat{u}_{j+m+2} - \hat{u}_{j+1}} \hat{\mathcal{N}}_{j+1}^m(t),$$

γ) Αν  $j > s + 1$ , τότε ισχύει  $\mathcal{N}_j^m(t) = \hat{\mathcal{N}}_{j+1}^m(t)$ .

8.4.7 Θεωρούμε τις πεπερασμένες ακολουθίες κόμβων  $U$  και  $\hat{U}$  της Άσκησης 6. Ας είναι  $F : [u_0, u_{N+1}] \rightarrow \mathbb{A}^n$  μία B-spline καμπύλη βαθμού  $m$  επί της  $U$  και  $d_{-m}, \dots, d_N$  η ακολουθία σημείων ελέγχου της  $F$ . Θέτουμε:

$$\hat{d}_j = \begin{cases} d_j, & \text{αν } -m \leq j \leq s - 2m, \\ (1 - a_j)d_{j-1} + a_j d_j, & \text{αν } s - 2m + 1 \leq j \leq s, \\ d_{j-1}, & \text{αν } s + 1 \leq j \leq N + 1, \end{cases}$$

όπου

$$a_j = \frac{\hat{u} - u_j}{u_{j+m} - u_j}.$$

Να δειχθεί ότι για κάθε  $t \in [u_i, u_{i+1}]$ , όπου  $u_i < u_{i+1}$ , ισχύει:

$$F_i(t) = \sum_{j=-m}^{N+1} \hat{\mathcal{N}}_{j,i}^m(t) \hat{d}_j.$$

**8.4.8** Ας είναι  $F$  μία κυβική B-spline καμπύλη επί μίας ακολουθίας κόμβων  $U = (u_k)$  και  $(d_k)$  η αντίστοιχη ακολουθία σημείων ελέγχου του de Boor. Για κάθε ζεύγος κόμβων  $u_i < u_{i+1}$  να εκφραστούν τα σημεία ελέγχου του Bézier του τμήματος  $F_i : [u_i, u_{i+1}] \rightarrow \mathbb{A}^n$  με τη βοήθεια των κόμβων της ακολουθίας  $U$  και των σημείων  $d_k$ .

## Βιβλιογραφία

- [1] R.H. Bartels, J.C. Beatty και B.A. Barsky. *An Introduction to Splines for use in Computer Graphics and Geometric Modelling*. Morgan-Kaufmann Publishers, 1987.
- [2] C. De Boor. *A Practical Guide to Splines*. New York: Springer, 1978.
- [3] N. Carter. *Introduction to the Mathematics of Computer Graphics*. Mathematical Association of America, 2016.
- [4] P.d.F. De Casteljau. *Shape mathematics and CAD*. London: Kogan Page Ltd, 1986.
- [5] Tony deRose, Michael Lounsbery και Ronald Goldman. “A Tutorial Introduction to Blossoming”. Στο: *Geometric Modeling*. Επιμέλεια υπό Hans Hagen και Dieter Roller. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1991, σσ. 267–286.
- [6] G. Farine. *Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design, A practical Guide*. San Diego: Academic Press, 1997.
- [7] J. Gallier. *Curves and Surfaces in Geometric Modelling: Theory and Algorithms*. San Francisco: The Morgan-Kaufmann Series in Computer Graphics. Morgan-Kauffman Publishers, 1999.
- [8] R. Goldman. “Blossoming and knot insertion algorithms for B-spline curve”. Στο: *Computer Aided Geometric Design* 7.1 (1990), σσ. 69–81.
- [9] J. Hoschek. *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*. AK Peters, 1993.
- [10] S. Mann. *A Blossoming Development of Splines*. Morgan & Claypool Publishers, 2006.
- [11] M.E. Mortenson. *Geometric Modelling*. Industrial Press Inc, 2006.
- [12] H. Prautzsch, W. Boehm και M. Paluszny. *Bézier and B-Spline Techniques*. Springer, 2002.
- [13] L. Ramshaw. *Blossoming: A connect the dots approach to splines*. Palo Alto, California: Digital Systems Research Center: SRC reports, 1987.
- [14] L. Ramshaw. “Blossoms are polar forms”. Στο: *Computer Aided Geometric Design* 6.4 (1989), σσ. 323–358.
- [15] Thomas W. Sederberg. *Computer Aided Geometric Design*. Faculty Publications, 2012.
- [16] H.P. Seidel. “An introduction to polar forms”. Στο: *IEEE Computer Graphics and Applications* 13.1 (1993), σσ. 38–46.
- [17] E.V. Shikin και A. I. Plis. *Handbook on Splines for the User*. CRC Press, 1995.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

---

# ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

---

### Σύνοψη

Στα προηγούμενα κεφάλαια μελετήσαμε τη μορφή του Βέζιερ των πολυωνυμικών καμπυλών και τις B-spline καμπύλες, οι οποίες ορίζονται από τα σημεία ελέγχου τους τα οποία γενικώς δεν είναι σημεία τους. Σ' αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε μεθόδους κατασκευής καμπυλών οι οποίες διέρχονται από προκαθορισμένα σημεία. Πιο συγκεκριμένα: το πρόβλημα έχει την εξής μορφή: Δίνονται σημεία  $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{A}^m$  και αντίστοιχες τιμές  $t_0, \dots, t_n \in \mathbb{A}$  και ζητείται μία πολυωνυμική καμπύλη  $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^m$  τέτοια, ώστε  $F(t_i) = P_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ). Συχνά αναζητούνται καμπύλες οι οποίες ικανοποιούν και άλλες ιδιότητες, όπως για παράδειγμα να έχουν δεδομένες εφαπτομένες στα σημεία αυτά. Μερικά συγγράμματα απ' όπου ο αναγνώστης μπορεί να αντλήσει και άλλες πληροφορίες είναι αυτά τα οποία παρατίθενται στο τέλος του κεφαλαίου.

### 9.1 Η Μέθοδος του *Vandermonde*

Ας είναι  $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{A}^3$  και  $t_0, \dots, t_n \in \mathbb{A}$ . Θα προσδιορίσουμε πολυώνυμα

$$F_i(t) = a_{i,0} + a_{i,1}t + \dots + a_{i,n}t^n \quad (i = 1, 2, 3)$$

έτσι, ώστε η πολυωνυμική καμπύλη

$$F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^3, t \mapsto (F_1(t), F_2(t), F_3(t))$$

να ικανοποιεί  $F(t_i) = P_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ). Ας είναι  $P_i = (p_{i,1}, p_{i,2}, p_{i,3})$  ( $i = 0, \dots, n$ ). Τότε, για κάθε  $i = 1, 2, 3$ , η εύρεση των συντελεστών του  $F_i(t)$  ισοδυναμεί με την επίλυση του γραμμικού συστήματος:

$$\begin{aligned} a_{i,0} + a_{i,1}t_0 + \dots + a_{i,n}t_0^n &= p_{0,i}, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{i,0} + a_{i,1}t_n + \dots + a_{i,n}t_n^n &= p_{n,i}. \end{aligned}$$

Ο πίνακας του γραμμικού συστήματος είναι:

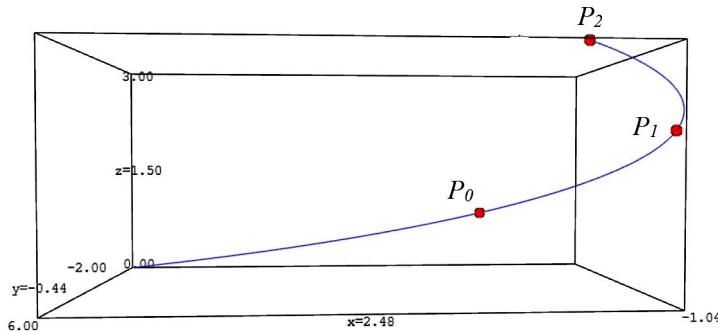
$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \dots & t_0^n \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^n \end{pmatrix}.$$

Η ορίζουσα του  $A_i$  είναι η γνωστή ορίζουσα του Vandermonde. Οπότε, ισχύει:

$$|A_i| = \prod_{0 \leq k < l \leq n} (t_l - t_k).$$

Καθώς  $|A_i| \neq 0$ , το γραμμικό σύστημα έχει μοναδική λύση και κατά συνέπεια υπάρχει μοναδική πολωνυμική καμπύλη  $F$  με την παραπάνω ιδιότητα η οποία προσδιορίζεται από τις λύσεις των τριών γραμμικών συστημάτων. Η επίλυση των τριών γραμμικών συστημάτων επιτυγχάνεται στην πράξη με την εφαρμογή πιο αποτελεσματικών μεθόδων από αυτή του Cramer που βασίζεται στη χρήση οριζουσών.

**Παράδειγμα 9.1.** Θα προσδιορίσουμε τη μοναδική πολωνυμική καμπύλη  $F$  που διέρχεται από τα σημεία  $P_0 = (1, 0, 1)$ ,  $P_1 = (-1, 1, 2)$ ,  $P_2 = (0, 1, 3)$  τα οποία αντιστοιχούν στις τιμές  $t = 1, 2, 3$ .



Σχήμα 9.1: Η καμπύλη  $F(t)$  του Παραδείγματος 9.1.

Ας είναι  $F(t) = (F_1(t), F_2(t), F_3(t))$ , για κάθε  $t \in \mathbb{A}$ . Θέτουμε  $F_i(t) = a_{i,0} + a_{i,1}t + a_{i,2}t^2$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Τότε, οι ισότητες  $F(t_j) = P_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) ισοδυναμούν με τα εξής τρία γραμμικά συστήματα:

α)  $F_1(1) = 1, F_1(2) = -1, F_1(3) = 0.$

β)  $F_2(1) = 0, F_2(2) = 1, F_2(3) = 1.$

γ)  $F_3(1) = 1, F_3(2) = 2, F_3(3) = 3.$

Το πρώτο σύστημα είναι:

$$\begin{aligned} a_{1,0} + a_{1,1} + a_{1,2} &= 1, \\ a_{1,0} + a_{1,1}2 + a_{1,2}4 &= -1, \\ a_{1,0} + a_{1,1}3 + a_{1,2}9 &= 0. \end{aligned}$$

Βρίσκουμε  $(a_{1,0}, a_{1,1}, a_{1,2}) = (6, -13/2, 3/2)$  και επομένως έχουμε

$$F_1(t) = 6 - \frac{13}{2}t + \frac{3}{2}t^2.$$

Ομοίως, υπολογίζουμε:

$$F_2(t) = -2 + \frac{5}{2}t - \frac{1}{2}t^2, \quad F_3(t) = t.$$

Άρα, η ζητούμενη καμπύλη δίνεται από την απεικόνιση:

$$F(t) = \left(6 - \frac{13}{2}t + \frac{3}{2}t^2, -2 + \frac{5}{2}t - \frac{1}{2}t^2, t\right), \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{A}.$$

## 9.2 Ο Αλγόριθμος του Aitken

Ο αλγόριθμος του Aitken είναι μία αναδρομική μέθοδος κατασκευής μίας πολυωνμικής καμπύλης  $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^3$  η οποία ορίζεται από πολυώνυμα βαθμού  $\leq n$  και διέρχεται από  $n + 1$  σημεία  $P_0, \dots, P_{n+1}$  του  $\mathbb{A}^3$  για αντίστοιχες τιμές  $t_0, \dots, t_n$ .

Θα ασχοληθούμε πρώτα με τις περιπτώσεις  $n = 1, 2$ . Αν  $n = 1$ , τότε μία τέτοια καμπύλη  $F_0^1(t)$  είναι η ευθεία που διέρχεται από τα  $P_0$  και  $P_1$ . Έτσι, έχουμε:

$$F_0^1(t) = \frac{t_1 - t}{t_1 - t_0} P_0 + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} P_1, \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{A}.$$

Ας είναι τώρα  $n = 2$ . Θεωρούμε την ευθεία  $F_0^1(t)$  που διέρχεται από τα  $P_0, P_1$  και την ευθεία  $F_1^1(t)$  που διέρχεται από τα  $P_1, P_2$ . Θεωρούμε την καμπύλη

$$F_0^2(t) = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_0} F_0^1(t) + \frac{t - t_0}{t_2 - t_0} F_1^1(t), \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{A}.$$

Έχουμε:

$$F_0^2(t_0) = F_0^1(t_0) = P_0, \quad F_0^2(t_2) = F_1^1(t_2) = P_2$$

και

$$F_0^2(t_1) = \frac{t_2 - t_1}{t_2 - t_0} F_0^1(t_1) + \frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0} F_1^1(t_1) = \frac{t_2 - t_1}{t_2 - t_0} P_1 + \frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0} P_1 = P_1.$$

Επομένως, η καμπύλη  $F_0^2(t)$  διέρχεται από τα σημεία  $P_0, P_1, P_2$ .

**Παράδειγμα 9.2.** Θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο του Aitken για να προσδιορίσουμε την καμπύλη του Παραδείγματος 9.1, δηλαδή την καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία  $P_0 = (1, 0, 1)$ ,  $P_1 = (-1, 1, 2)$ ,  $P_2 = (0, 1, 3)$  τα οποία αντιστοιχούν στις τιμές  $t = 1, 2, 3$ .

Θεωρούμε πρώτα τις ευθείες

$$F_0^1(t) = \frac{2 - t}{2 - 1} (1, 0, 1) + \frac{t - 1}{2 - 1} (-1, 1, 2) = (-2t + 3, t - 1, t)$$

και

$$F_1^1(t) = \frac{3 - t}{3 - 2} (-1, 1, 2) + \frac{t - 2}{3 - 2} (0, 1, 3) = (t - 3, 1, t).$$

Επομένως, η ζητούμενη καμπύλη είναι:

$$F_0^2(t) = \frac{3 - t}{3 - 1} F_0^1(t) + \frac{t - 1}{3 - 2} F_1^1(t) = \left(6 - \frac{13}{2}t + \frac{3}{2}t^2, -2 + \frac{5}{2}t - \frac{1}{2}t^2, t\right).$$

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τη γενική περίπτωση. Ο αλγόριθμος του Aitken δίνεται παρακάτω.

**Αλγόριθμος 9.1.** Αλγοριθμος του Aitken.

Είσοδος:  $P_0, \dots, P_{n+1} \in \mathbb{A}^3$  και  $t_0, \dots, t_n \in \mathbb{A}$ .

Έξοδος: Καμπύλη  $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^3$  με  $F(t_i) = P_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ).

1. Θέτουμε  $F_i^0(t) = P_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ).

2. Για  $r = 1, \dots, n$ , υπολογίζουμε:

$$F_i^r(t) = \frac{t_{i+r} - t}{t_{i+r} - t_i} F_i^{r-1}(t) + \frac{t - t_i}{t_{i+r} - t_i} F_{i+1}^{r-1}(t) \quad (i = 0, \dots, n - r).$$

3. Εξάγουμε το  $F_0^n(t)$ .



Απόδειξη της ορθότητας του αλγορίθμου. Για  $r = 1$ , τα σημεία  $P_i$  και  $P_{i+1}$  είναι σημεία της ευθείας  $F_i^1(t)$  τα οποία αντιστοιχούν στα  $t_i$  και  $t_{i+1}$ . Ας υποθέσουμε ότι για την καμπύλη  $F_i^r(t)$  ισχύει  $F_i^r(t_i) = P_i, \dots, F_i^r(t_{i+r}) = P_{i+r}$ . Θεωρούμε την καμπύλη

$$F_i^{r+1}(t) = \frac{t_{i+r+1} - t}{t_{i+r+1} - t_i} F_i^r(t) + \frac{t - t_i}{t_{i+r} - t_i} F_{i+1}^r(t).$$

Θα δείξουμε ότι  $F_i^{r+1}(t_i) = P_i, \dots, F_{i+r+1}^{r+1}(t_{i+r+1}) = P_{i+r+1}$ . Από την υπόθεση επαγωγής παίρνουμε:

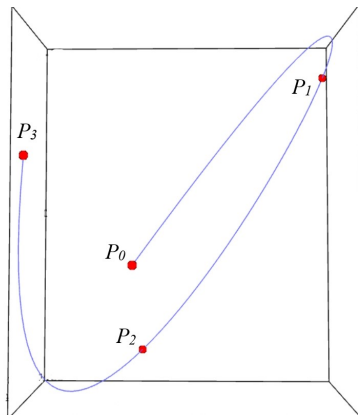
$$F_i^{r+1}(t_i) = F_i^r(t_i) = P_i, \quad F_{i+r+1}^{r+1}(t_{i+r+1}) = F_{i+r+1}^r(t_{i+r+1}) = P_{i+r+1}.$$

Επίσης, για  $k = 1, \dots, r$ , έχουμε:

$$\begin{aligned} F_i^{r+1}(t_{i+k}) &= \frac{t_{i+r+1} - t_{i+k}}{t_{i+r+1} - t_i} F_i^r(t_{i+k}) + \frac{t_{i+k} - t_i}{t_{i+r} - t_i} F_{i+1}^r(t_{i+k}) \\ &= \frac{t_{i+r+1} - t_{i+k}}{t_{i+r+1} - t_i} P_{i+k} + \frac{t_{i+k} - t_i}{t_{i+r} - t_i} P_{i+k} \\ &= P_{i+k}. \end{aligned}$$

Επομένως, η καμπύλη  $F_0^n(t)$  ικανοποιεί τις ισότητες  $F_0^n(t_i) = P_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ).

**Παράδειγμα 9.3.** Θα βρούμε την πολυωνυμική καμπύλη  $F(t)$  που διέρχεται από τα σημεία  $P_0 = (1, 1, 0)$ ,  $P_1 = (-1, 0, 2)$ ,  $P_2 = (1, 0, -1)$ ,  $P_3 = (2, 1, 1)$  για τις τιμές  $t = 0, 1, 2, 3$ , αντίστοιχα.



Σχήμα 9.2: Η καμπύλη  $F(t)$  του Παραδείγματος 9.3.

Πρώτα υπολογίζουμε τις ευθείες που διέρχονται από τα ζεύγη σημείων  $(P_0, P_1)$ ,  $(P_1, P_2)$  και  $(P_2, P_3)$ . Αυτές είναι αντίστοιχα οι εξής:

$$F_0^1(t) = \frac{1-t}{1-0}(1, 1, 0) + \frac{t-0}{1-0}(-1, 0, 2) = (1-2t, 1-t, 2t),$$

$$F_1^1(t) = \frac{2-t}{2-1}(-1, 0, 2) + \frac{t-1}{2-1}(1, 0, -1) = (-3+2t, 0, 5-3t),$$

$$F_2^1(t) = \frac{3-t}{3-2}(1, 0, -1) + \frac{t-2}{3-2}(2, 1, 1) = (-1+t, -2+t, -5+2t).$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τις καμπύλες που διέρχονται από τις τριάδες  $(P_0, P_1, P_2)$  και  $(P_1, P_2, P_3)$ . Οι καμπύλες αυτές είναι αντίστοιχα οι εξής:

$$F_0^2(t) = \frac{2-t}{2-0}F_0^1(t) + \frac{t-0}{2-0}F_1^1(t) = (1-4t+2t^2, \frac{2-3t+t^2}{2}, \frac{9t-5t^2}{2})$$

και

$$F_1^2(t) = \frac{3-t}{3-1}F_1^1(t) + \frac{t-1}{3-1}F_2^1(t) = \left( \frac{-8+7t-t^2}{2}, \frac{2-3t+t^2}{2}, \frac{20-21t+5t^2}{2} \right).$$

Τέλος, η ζητούμενη καμπύλη είναι:

$$F_0^3(t) = \frac{3-t}{3-0}F_0^2(t) + \frac{t-0}{3-0}F_1^2(t) = \left( \frac{6-34t+27t^2-5t^3}{6}, \frac{2-3t+t^2}{2}, \frac{47t-45t^2+10t^3}{6} \right).$$

Παρατηρούμε ότι η καμπύλη  $F_0^n(t)$  έχει την ιδιότητα της γραμμικής ακρίβειας, δηλαδή αν τα σημεία  $P_0, \dots, P_{n+1}$  βρίσκονται επί μίας ευθείας, τότε η  $F_0^n(t)$  είναι μία ευθεία. Επιπλέον, καθώς όλα τα βήματα του αλγορίθμου του Aitken είναι υπολογισμοί βαρυκεντρικών συνδυασμών, η εικόνα της καμπύλης  $F_0^n(t)$  από μία ομοπαραλληλική απεικόνιση  $\alpha : \mathbb{A}^3 \rightarrow \mathbb{A}^3$ , διέρχεται από τα σημεία  $\alpha(P_0), \dots, \alpha(P_{n+1})$ . Συνεπώς, η  $F_0^n(t)$  είναι αναλλοίωτη από τις ομοπαραλληλικές απεικονίσεις.

Τέλος, ας σημειωθεί ότι είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του Aitken για μία συγκεκριμένη τιμή του  $t$ , δηλαδή για  $t = \tau$ , παίρνουμε την τιμή  $F_0^n(\tau)$ . Έτσι, αν χρειαζόμαστε μόνο την τιμή  $F_0^n(\tau)$  και όχι τη μορφή της καμπύλης  $F_0^n(t)$ , μπορούμε να το κάνουμε απευθείας χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Aitken.

**Παράδειγμα 9.4.** Ας είναι  $P_0 = (-1, 0), P_1 = (0, 1), P_2 = (1, 2)$  και  $t_0 = 1, t_1 = 2, t_2 = 3$ . Συμβολίζουμε με  $F$  τη μοναδική καμπύλη δευτέρου βαθμού με  $F(t_i) = P_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Θα υπολογίσουμε την τιμή  $F(5/2)$  χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Aitken.

Πρώτα υπολογίζουμε τις τιμές:

$$F_0^1(5/2) = \frac{t_1 - 5/2}{t_1 - t_0}P_0 + \frac{5/2 - t_0}{t_1 - t_0}P_1 = \left( \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

και

$$F_1^1(5/2) = \frac{t_2 - 5/2}{t_2 - t_1}P_1 + \frac{5/2 - t_1}{t_2 - t_1}P_2 = \left( \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right).$$

Έτσι, έχουμε  $F(5/2) = (1/2, 3/2)$ .

### 9.3 Τα Πολυώνυμα του Lagrange

Ας είναι  $t_0, \dots, t_n$  διακεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί.

**Ορισμός 9.1.** Καλούμε  $i$ -οστό πολυώνυμο του Lagrange ως προς την ακολουθία  $t_0, \dots, t_n$  το πολυώνυμο

$$L_i^n(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j} \quad (i = 0, \dots, n)$$

Αμέσως παρατηρούμε ότι ισχύει

$$L_i^n(t_j) = \delta_{i,j},$$

όπου  $\delta_{i,i} = 1$  και  $\delta_{i,j} = 0$  για  $i \neq j$ .

Συμβολίζουμε με  $\mathbb{R}_n[t]$  τον  $\mathbb{R}$ -γραμμικό χώρο των πολυωνύμων του  $\mathbb{R}[t]$  με βαθμό  $\leq n$ .

**Πρόταση 9.1.** Τα πολυώνυμα  $L_i^n(t)$  ( $i = 0, \dots, n$ ) σχηματίζουν μία βάση του γραμμικού χώρου  $\mathbb{R}_n[t]$ .

*Απόδειξη.* Υπενθυμίζουμε ότι τα πολυώνυμα  $1, t, \dots, t^n$  αποτελούν μία βάση του  $\mathbb{R}$ -γραμμικού χώρου  $\mathbb{R}_n[t]$  και επομένως  $\dim \mathbb{R}_n[t] = n + 1$ . Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι τα πολυώνυμα  $L_i^n(t)$  ( $i = 0, \dots, n$ ) είναι  $\mathbb{R}$ -γραμμικώς ανεξάρτητα. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  έτσι, ώστε να ισχύει:

$$\sum_{i=0}^n a_i L_i^n(t) = 0.$$

Τότε, έχουμε

$$a_j = \sum_{i=0}^n a_i L_i^n(t_j) = 0 \quad (j = 0, \dots, n).$$

Άρα, τα πολυώνυμα  $L_i^n(t)$  ( $i = 0, \dots, n$ ) είναι  $\mathbb{R}$ -γραμμικώς ανεξάρτητα και κατά συνέπεια αποτελούν μία βάση του  $\mathbb{R}_n[t]$ .  $\square$

**Πόρισμα 9.1.** Για κάθε  $P(t) \in \mathbb{R}_n[t]$  ισχύει

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P(t_i) L_i^n(t).$$

*Απόδειξη.* Σύμφωνα με την Πρόταση 9.1, υπάρχουν  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  έτσι, ώστε να ισχύει

$$P(t) = \sum_{i=0}^n a_i L_i^n(t).$$

Τότε, έχουμε  $P(t_i) = a_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ), απ' όπου έπεται το αποτέλεσμα.  $\square$

**Πόρισμα 9.2.** Έχουμε:

$$1 = \sum_{i=0}^n L_i^n(t) \quad \text{και} \quad t = \sum_{i=0}^n t_i L_i^n(t).$$

*Απόδειξη.* Εφαρμόζοντας το Πόρισμα 9.1 για  $P(t) = 1, t$ , παίρνουμε το αποτέλεσμα.  $\square$

Ας είναι  $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{A}^3$ . Θεωρούμε την πολυωνυμική καμπύλη

$$F(t) = \sum_{i=0}^n L_i^n(t) P_i.$$

Έχουμε:

$$F(t_j) = \sum_{i=0}^n L_i^n(t_j) P_i = \sum_{i=0}^n \delta_{ij} P_i = P_j \quad (j = 0, \dots, n).$$

Όπως είδαμε στην πρώτη ενότητα, η καμπύλη  $F$  με την παραπάνω ιδιότητα είναι μοναδική. Αυτό όμως μπορούμε να το πάρουμε και ως συνέπεια του Πορίσματος 9.1. Πράγματι, ας είναι  $P_j = (p_{j,1}, p_{j,2}, p_{j,3})$  ( $j = 0, \dots, n$ ) και  $G(t) = (G_1(t), G_2(t), G_3(t))$  μία πολυωνυμική καμπύλη με  $G_i(t) \in \mathbb{R}_n[t]$  ( $i = 1, 2, 3$ ) τέτοια, ώστε  $G(t_i) = P_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ). Τότε, έχουμε  $G_i(t_j) = p_{j,i}$  ( $j = 0, \dots, n$ ). Έτσι, από το Πόρισμα 9.1, παίρνουμε:

$$G_i(t) = \sum_{j=0}^n G_i(t_j) L_j^n(t) = \sum_{j=0}^n p_{j,i} L_j^n(t).$$

Επομένως, προκύπτει:

$$G(t) = \sum_{j=0}^n P_j L_j^n(t) = F(t).$$

Από το Πόρισμα 9.2, έχουμε ότι  $\sum_{i=0}^n L_i^n(t) = 1$  και επομένως τα σημεία της καμπύλης  $F(t)$  είναι βαρυκεντρικοί συνδυασμοί των σημείων  $P_0, \dots, P_n$ . Συνεπώς, η καμπύλη  $F(t)$  είναι αναλλοίωτη από τις ομοπαράλληλες απεικονίσεις.

**Παράδειγμα 9.5.** Θα βρούμε την πολυωνμική καμπύλη  $F(t)$  που διέρχεται από τα σημεία  $P_0 = (0, 1, 0)$ ,  $P_1 = (1, 0, 2)$ ,  $P_2 = (1, 1, -1)$ ,  $P_3 = (2, -1, 1)$  για τις τιμές  $t_0 = -1$ ,  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 3$ ,  $t_3 = 4$ , αντίστοιχα.

Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε τα εξής πολώνυμα του Lagrange:

$$L_0^3(t) = \frac{t-t_1}{t_0-t_1} \frac{t-t_2}{t_0-t_2} \frac{t-t_3}{t_0-t_3} = \frac{t-1}{-2} \frac{t-3}{-4} \frac{t-4}{-5} = -\frac{1}{40}(t^3 - 8t^2 + 19t - 12),$$

$$L_1^3(t) = \frac{t-t_0}{t_1-t_0} \frac{t-t_2}{t_1-t_2} \frac{t-t_3}{t_1-t_3} = \frac{t+1}{2} \frac{t-3}{-2} \frac{t-4}{-3} = \frac{1}{12}(t^3 - 6t^2 + 5t + 12),$$

$$L_2^3(t) = \frac{t-t_0}{t_2-t_0} \frac{t-t_1}{t_2-t_1} \frac{t-t_3}{t_2-t_3} = \frac{t+1}{4} \frac{t-1}{2} \frac{t-4}{-1} = -\frac{1}{8}(t^3 - 4t^2 - t + 4),$$

$$L_3^3(t) = \frac{t-t_0}{t_3-t_0} \frac{t-t_1}{t_3-t_1} \frac{t-t_2}{t_3-t_2} = \frac{t+1}{5} \frac{t-1}{3} \frac{t-3}{1} = -\frac{1}{15}(t^3 - 3t^2 - t + 3).$$

Επομένως, η ζητούμενη καμπύλη είναι:

$$F(t) = \sum_{i=0}^n L_i^n(t) P_i = (F_1(t), F_2(t), F_3(t)),$$

όπου

$$F_1(t) = -\frac{7}{40}t^3 + \frac{2}{5}t^2 + \frac{27}{40}t + \frac{1}{10},$$

$$F_2(t) = \frac{113}{120}t^3 - \frac{77}{10}t^2 + \frac{2287}{120}t - \frac{123}{10},$$

$$F_3(t) = \frac{9}{40}t^3 - \frac{13}{10}t^2 + \frac{31}{40}t + \frac{23}{10}.$$

Οι τρεις μέθοδοι κατασκευής καμπυλών τις οποίες είδαμε μέχρι τώρα έχουν και μερικά μειονεκτήματα. Ένα από αυτά είναι ότι για την παρεμβολή πολλών σημείων απαιτείται η κατασκευή πολυωνύμων μεγάλου βαθμού και κατά συνέπεια οι υπολογισμοί γίνονται πλέον πολύπλοκοι. Το σημαντικότερο όμως μειονέκτημα είναι ότι η καμπύλη που προκύπτει δεν ακολουθεί πιστά τα σημεία παρεμβολής. Γι' αυτούς τους λόγους κατασκευάζονται καμπύλες που αποτελούνται από τμήματα πολυωνμικών καμπυλών τα οποία συνενώνονται με κατάλληλες συνθήκες συνέχειας. Στις επόμενες ενότητες θα δούμε μεθόδους κατασκευής τέτοιων καμπυλών.

#### 9.4 Κυβική Παρεμβολή του *Hermite*

Σ' αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε την κατασκευή κυβικών καμπυλών οι οποίες διέρχονται από προκαθορισμένα σημεία και έχουν συγκεκριμένες εφαπτόμενες σ' αυτά τα σημεία. Πρώτα θα εξετάσουμε το εξής απλό πρόβλημα: Δίνονται τα σημεία  $a_0, a_1 \in \mathbb{A}^3$ , τα διανύσματα  $m_0, m_1 \in \mathbb{R}^3$ , οι πραγματικοί αριθμοί  $r < s$  και ζητείται η κατασκευή μίας κυβικής καμπύλης  $F: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^3$ , η οποία να διέρχεται από τα  $a_0, a_1$  για  $t = r, s$  και να έχει τα διανύσματα  $m_0, m_1$  ως εφαπτόμενες σ' αυτά, αντίστοιχα. Δηλαδή, να ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$F(r) = a_0, \quad F(s) = a_1, \quad DF(r) = m_0, \quad DF(s) = m_1.$$

Θεωρούμε τη μορφή του Bézier της καμπύλης  $F(t)$  ως προς το διάστημα  $[r, s]$ :

$$F(t) = \sum_{k=0}^3 B_k^3[r, s](t) b_k.$$

Τότε, έχουμε

$$a_0 = F(r) = b_0, \quad a_1 = F(s) = b_3$$

και από την Πρόταση 7.3 παίρνουμε

$$m_0 = DF(0) = \frac{3}{s-r}(b_1 - b_0), \quad m_1 = DF(1) = \frac{3}{s-r}(b_3 - b_2).$$

Επομένως, ισχύει:

$$b_1 = a_0 + \frac{s-r}{3}m_0, \quad b_2 = a_1 - \frac{s-r}{3}m_1.$$

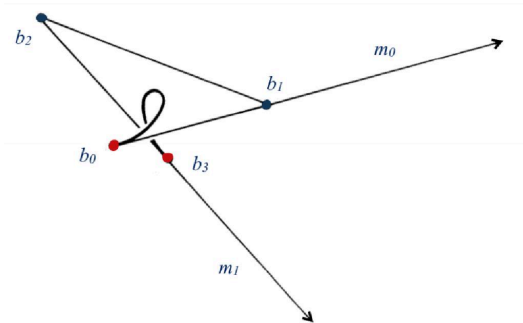
Έτσι, η ζητούμενη καμπύλη είναι:

$$F(t) = H_0^3[r, s](t)a_0 + H_1^3[r, s](t)m_0 + H_2^3[r, s](t)m_1 + H_3^3[r, s](t)a_1,$$

όπου

$$\begin{aligned} H_0^3[r, s](t) &= B_0^3[r, s](t) + B_1^3[r, s](t), \\ H_1^3[r, s](t) &= \frac{s-r}{3}B_1^3[r, s](t), \\ H_2^3[r, s](t) &= -\frac{s-r}{3}B_2^3[r, s](t), \\ H_3^3[r, s](t) &= B_2^3[r, s](t) + B_3^3[r, s](t). \end{aligned}$$

**Ορισμός 9.2.** Τα πολυώνυμα  $H_i^3[r, s](t)$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) καλούνται *πολυώνυμα του Hermite* τρίτου βαθμού, ως προς το διάστημα  $[r, s]$ . Αν  $r = 0$  και  $s = 1$ , τότε θα γράφουμε πιο απλά  $H_i^3(t)$  αντί  $H_i^3[0, 1](t)$ . Η παραπάνω γραφή της  $F(t)$  με τη βοήθεια των πολυωνύμων του Hermite καλείται *μορφή του Hermite* της καμπύλης  $F(t)$ .



Σχήμα 9.3: Η καμπύλη σε μορφή του Bézier με σημεία ελέγχου  $b_0, b_1, b_2, b_3$  διέρχεται από τα  $b_0, b_1$  και έχει εφαπτομένες σε αυτά τις  $m_0, m_1$ , αντίστοιχα.

Ας σημειωθεί ότι έχουμε:

$$\begin{aligned} H_0^3(t) &= 2t^3 - 3t^2 + 1, \\ H_1^3(t) &= t^3 - 2t^2 + t, \\ H_2^3(t) &= t^3 - t^2, \\ H_3^3(t) &= -2t^3 + 3t^2. \end{aligned}$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 6.2, τα πολυώνυμα  $B_j^3(t)$ , ( $j = 0, 1, 2, 3$ ) αποτελούν μία βάση για τον γραμμικό χώρο  $\mathbb{R}_3[t]$  και κατά συνέπεια τα πολυώνυμα  $H_j^3(t)$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ) έχουν την ίδια ιδιότητα. Επίσης, έχουμε:

$$\begin{aligned} H_0^3[r, s](t) &= H_0^3\left(\frac{t-r}{s-r}\right), \\ H_1^3[r, s](t) &= (s-r)H_1^3\left(\frac{t-r}{s-r}\right), \\ H_2^3[r, s](t) &= (s-r)H_2^3\left(\frac{t-r}{s-r}\right), \\ H_3^3[r, s](t) &= H_3^3\left(\frac{t-r}{s-r}\right). \end{aligned}$$

Από τις προηγούμενες σχέσεις φαίνεται ότι η μορφή Hermite μίας κυβικής καμπύλης δεν είναι αναλλοίωτη από μετασχηματισμούς της παραμέτρου όπως συμβαίνει με τη μορφή του Bézier.

**Παράδειγμα 9.6.** Θα κατασκευάσουμε μία κυβική καμπύλη  $F$  με  $F(0) = (1, 0, 1)$ ,  $F(1) = (1, 1, 2)$  και  $DF(0) = (1, -1, 2)$ ,  $DF(1) = (2, 1, 2)$ . Σύμφωνα με τα παραπάνω, η ζητούμενη καμπύλη είναι:

$$\begin{aligned} F(t) &= (2t^3 - 3t^2 + 1)(1, 0, 1) + \\ &\quad (t^3 - 2t^2 + t)(1, -1, 2) + (t^3 - t^2)(2, 1, 2) + (-2t^3 + 3t^2)(1, 1, 2). \end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε:

$$F(t) = (3t^3 - 4t^2 + t + 1, -2t^3 + 4t^2 - t, 2t^3 - 3t^2 + 2t + 1).$$

Θεωρούμε σημεία  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{A}^3$ , διανύσματα  $m_0, \dots, m_n \in \mathbb{R}^3$  και πραγματικοί αριθμοί  $t_0 < \dots < t_n$ . Για κάθε  $i = 0, \dots, n-1$ , η καμπύλη

$$\begin{aligned} F_i(t) &= H_0^3[t_i, t_{i+1}](t)a_i + \\ &\quad H_1^3[t_i, t_{i+1}](t)m_i + H_2^3[t_i, t_{i+1}](t)m_{i+1} + H_3^3[t_i, t_{i+1}](t)a_{i+1} \end{aligned}$$

διέρχεται από τα σημεία  $a_i, a_{i+1}$  για  $t = t_i, t_{i+1}$  και έχει εφαπτομένες σε αυτά τα διανύσματα  $m_i, m_{i+1}$ , αντίστοιχα. Έτσι, προκύπτει μία κατά τμήματα κυβική καμπύλη  $F : [t_0, t_n] \rightarrow \mathbb{A}^3$  με  $F(t) = F_i(t)$ , για κάθε  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  και τα τμήματα  $F_i([t_i, t_{i+1}])$  και  $F_{i+1}([t_{i+1}, t_{i+2}])$  ενώνονται με παραμετρική συνέχεια  $C^1$  στο  $t_{i+1}$ .

Συχνά, στην πράξη, οι εφαπτομένες στα σημεία  $a_0, \dots, a_n$  δεν είναι εύκολο να προσδιοριστούν επακριβώς ώστε η καμπύλη παρεμβολής που θα προκύψει να έχει το επιθυμητό σχήμα. Έτσι, έχουν αναπτυχθεί μέθοδοι υπολογισμού εφαπτόμενων διανυσμάτων οι οποίες βασίζονται στα σημεία  $a_0, \dots, a_n$ . Τα διανύσματα αυτά χρησιμοποιούνται για την κατασκευή μίας κατά τμήματα κυβικής καμπύλης  $F(t)$  σε μορφή του Hermite και κατόπιν η καμπύλη αυτή μπορεί να τροποποιηθεί ώστε να προκύψει η καμπύλη επιθυμητού σχήματος.

Θα περιγράψουμε στη συνέχεια τη μέθοδο του Bessel για τον υπολογισμό των εφαπτόμενων στα σημεία  $a_0, \dots, a_n$ . Για κάθε  $i = 1, \dots, n-1$ , κατασκευάζουμε, χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Aitken, την καμπύλη  $Q_i(t)$  με  $Q_i(t_j) = a_j$  ( $j = i-1, i, i+1$ ). Έχουμε:

$$Q_i(t) = Q_{i,i-1}(t)a_{i-1} + Q_{i,i}(t)a_i + Q_{i,i+1}(t)a_{i+1}.$$

όπου

$$\begin{aligned} Q_{i,i-1}(t) &= \frac{(t_{i+1} - t)(t_i - t)}{(t_{i+1} - t_{i-1})(t_i - t_{i-1})}, \\ Q_{i,i}(t) &= \frac{(t_{i+1} - t)(t - t_{i-1})}{(t_{i+1} - t_{i-1})(t_i - t_{i-1})} + \frac{(t - t_{i-1})(t_{i+1} - t)}{(t_{i+1} - t_{i-1})(t_{i+1} - t_i)}, \\ Q_{i,i+1}(t) &= \frac{(t - t_{i-1})(t - t_i)}{(t_{i+1} - t_{i-1})(t_{i+1} - t_i)}. \end{aligned}$$

Η εφαπτομένη της  $Q_i(t)$  στο σημείο  $a_i$  είναι το διάνυσμα

$$m_i = DQ_i(t_i) = \frac{t_i - t_{i+1}}{(t_{i+1} - t_{i-1})(t_i - t_{i-1})} a_{i-1} + \frac{t_{i-1} - 2t_i + t_{i+1}}{(t_{i+1} - t_i)(t_i - t_{i-1})} a_i + \frac{t_i - t_{i-1}}{(t_{i+1} - t_{i-1})(t_{i+1} - t_i)} a_{i+1}.$$

Οπότε, για την κατασκευή της καμπύλης  $F(t)$  θα απαιτήσουμε οι εφαπτομένες στα σημεία  $a_1, \dots, a_{n-1}$  να είναι τα διανύσματα  $m_1, \dots, m_{n-1}$ . Επίσης, για τα ακραία σημεία  $a_0$  και  $a_n$  θα πάρουμε ως εφαπτομένες σε αυτά τα διανύσματα

$$m_0 = DQ_1(a_0) = \frac{2t_0 - t_1 - t_2}{(t_2 - t_0)(t_1 - t_0)} a_0 + \frac{t_2 - t_0}{(t_2 - t_1)(t_1 - t_0)} a_1 + \frac{t_0 - t_1}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_0)} a_2$$

και

$$m_n = DQ_{n-1}(a_n) = \frac{t_n - t_{n-1}}{(t_n - t_{n-2})(t_{n-1} - t_{n-2})} a_{n-2} + \frac{t_{n-2} - t_n}{(t_n - t_{n-1})(t_{n-1} - t_{n-2})} a_{n-1} + \frac{2t_n - t_{n-1} - t_{n-2}}{(t_n - t_{n-1})(t_n - t_{n-2})} a_n,$$

αντίστοιχα.

**Παράδειγμα 9.7.** Θεωρούμε τα σημεία  $a_0 = (1, 0, 0)$ ,  $a_1 = (1, 0, -1)$ ,  $a_2 = (0, -1, 1)$ ,  $a_3 = (-1, 2, 1)$  και τους αριθμούς  $t_0 = 1$ ,  $t_1 = 2$ ,  $t_2 = 4$ ,  $t_3 = 5$ . Θα κατασκευάσουμε μία κατά τμήματα κυβική καμπύλη  $F(t)$  σε μορφή Hermite τέτοια, ώστε  $F(t_i) = a_i$ , ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) και οι εφαπτομένες σ' αυτά τα σημεία να δίνονται από τη μέθοδο του Bessel.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, οι εφαπτομένες στα σημεία  $a_0, a_1, a_2, a_3$  είναι αντίστοιχα:

$$m_0 = -\frac{4}{3}a_0 + \frac{3}{2}a_1 + \frac{1}{6}a_2 = \frac{1}{6}(1, -1, -8),$$

$$m_1 = -\frac{2}{3}a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 = -\frac{1}{6}(1, 2, 1),$$

$$m_2 = -\frac{1}{6}a_1 - a_2 + \frac{2}{3}a_3 = \frac{1}{6}(-5, 14, -1),$$

$$m_3 = \frac{1}{6}a_1 - \frac{3}{2}a_2 + \frac{4}{3}a_3 = \frac{1}{6}(-7, 25, -2).$$

Στη συνέχεια, για κάθε  $i = 0, 1, 2$ , έχουμε την καμπύλη

$$F_i(t) = H_0^3[t_i, t_{i+1}](t)a_i + H_1^3[t_i, t_{i+1}](t)m_i + H_2^3[t_i, t_{i+1}](t)m_{i+1} + H_3^3[t_i, t_{i+1}](t)a_{i+1}$$

η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις  $F_i(t_i) = a_i$ ,  $F_i(t_{i+1}) = a_{i+1}$  και οι εφαπτομένες στα σημεία  $a_i, a_{i+1}$  είναι  $m_i, m_{i+1}$  αντίστοιχα. Πιο αναλυτικά, έχουμε τις καμπύλες:

$$F_0(t) = H_0^3[1, 2](t)a_0 + H_1^3[1, 2](t)m_0 + H_2^3[1, 2](t)m_1 + H_3^3[1, 2](t)a_1,$$

$$F_1(t) = H_0^3[2, 4](t)a_1 + H_1^3[2, 4](t)m_1 + H_2^3[2, 4](t)m_2 + H_3^3[2, 4](t)a_2,$$

$$F_2(t) = H_0^3[4, 5](t)a_2 + H_1^3[4, 5](t)m_2 + H_2^3[4, 5](t)m_3 + H_3^3[4, 5](t)a_3.$$

Κάνοντας τους σχετικούς υπολογισμούς, παίρνουμε:

$$F_0(t) = \frac{1}{6}(-t^3 + 3t + 4, -3t^3 + 13t^2 - 18t + 8, 3t^3 - 10t^2 + 3t + 4),$$

$$F_1(t) = \frac{1}{12}(-11t^2 + 42t - 16, 9t^3 - 73t^2 + 180t - 140, -7t^3 + 72t^2 - 206t + 156),$$

$$F_2(t) = \frac{1}{6}(-t^2 + 3t + 4, 3t^3 - 35t^2 + 150t - 238, -3t^3 + 40t^2 - 177t + 266).$$

Συνεπώς, η ζητούμενη καμπύλη  $F(t) : [1, 5] \rightarrow \mathbb{A}^3$  ορίζεται από τις σχέσεις  $F(t) = F_i(t)$ , για κάθε  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  ( $i = 0, 1, 2$ ).

Ένας άλλος γνωστός τρόπος κατασκευής των εφαπτόμενων διανυσμάτων είναι η μέθοδος FMILL. Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο, η εφαπτομένη  $m_i$  στο σημείο  $a_i$  είναι παράλληλη προς την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία  $a_{i-1}$  και  $a_{i+1}$ , δηλαδή έχουμε  $m_i = a_{i+1} - a_{i-1}$ . Οι εφαπτομένες όμως στα ακραία σημεία  $a_0$  και  $a_n$  δεν μπορούν να υπολογιστούν με αυτό τον τρόπο. Ένας τρόπος να συμπληρωθούν οι εφαπτομένες σ' αυτά τα σημεία είναι η χρήση της μεθόδου του Bessel.

**Παράδειγμα 9.8.** Με τα δεδομένα του προηγούμενου παραδείγματος θα κατασκευάσουμε μία καμπύλη παρεμβολής παίρνοντας τα εφαπτόμενα διανύσματα στα σημεία  $a_1$  και  $a_2$  με τη μέθοδο FMILL. Έτσι, οι εφαπτομένες στα σημεία  $a_1$  και  $a_2$  είναι τα διανύσματα

$$m_1 = a_2 - a_0 = (-1, -1, 1) \quad \text{και} \quad m_2 = a_3 - a_1 = (0, 2, 0).$$

Στη συνέχεια κάνουμε τους απαιτούμενους υπολογισμούς και παίρνουμε τις καμπύλες:

$$F_0(t) = \frac{1}{6}(-5t^3 + 19t^2 - 22t + 14, -7t^3 + 29t^2 - 38t + 16, 10t^3 - 38t^2 + 38t - 10),$$

$$F_1(t) = \frac{1}{4}(t^2 - 8t + 16, 2t^3 - 15t^2 + 32t - 20, -t^3 + 8t^2 - 16t + 4),$$

$$F_2(t) = \frac{1}{6}(5t^3 - 71t^2 + 328t - 496, t^3 - 7t^2 + 20t - 38, -2t^3 + 26t^2 - 112t + 166).$$

Επομένως, η ζητούμενη καμπύλη  $F(t) : [1, 5] \rightarrow \mathbb{A}^3$  ορίζεται από τις σχέσεις  $F(t) = F_i(t)$ , για κάθε  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  ( $i = 0, 1, 2$ ).

Τέλος, είναι δυνατόν να απαιτήσουμε τα τμήματα της καμπύλης παρεμβολής να ενώνονται με παραμετρική συνέχεια  $C^2$ , δηλαδή, για κάθε  $i = 1, \dots, n-1$  να ισχύει:

$$D^2F_{i-1}(t_i) = D^2F_i(t_i).$$

Παραγωγίζοντας δύο φορές τα τμήματα σε μορφή του Hermite  $F_{i-1}$  και  $F_i$  παίρνουμε ισοδύναμα την ισότητα

$$(t_{i+1} - t_i)m_{i-1} + 2(t_{i+1} - t_{i-1})m_i + (t_i - t_{i-1})m_{i+1} =$$

$$3\frac{t_{i+1} - t_i}{t_i - t_{i-1}}(a_i - a_{i-1}) + 3\frac{t_i - t_{i-1}}{t_{i+1} - t_i}(a_{i+1} - a_i).$$

Ας είναι  $m_i = (m_{i,1}, m_{i,2}, m_{i,3})$  ( $i = 0, \dots, n$ ). Για κάθε  $i = 1, \dots, n-1$  θέτουμε:  $A_i = t_i - t_{i-1}$ ,  $B_{i+1} = t_{i+1} - t_{i-1}$  και

$$(C_{i,1}, C_{i,2}, C_{i,3}) = 3\frac{t_{i+1} - t_i}{t_i - t_{i-1}}(a_i - a_{i-1}) + 3\frac{t_i - t_{i-1}}{t_{i+1} - t_i}(a_{i+1} - a_i).$$

Επίσης, θέτουμε  $(C_{i,1}, C_{i,2}, C_{i,3}) = (m_{i,1}, m_{i,2}, m_{i,3})$ , ( $i = 0, n$ ). Έτσι, έχουμε τα τρία συστήματα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ A_2 & 2B_2 & A_1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & A_n & 2B_n & A_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{0,i} \\ \vdots \\ X_{n,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{0,i} \\ \vdots \\ C_{n,i} \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, 3).$$



Για κάθε  $i = 1, 2, 3$ , μία λύση του αντίστοιχου συστήματος είναι η  $(n + 1)$ -άδα  $(m_{i,0}, \dots, m_{i,n})$ . Αυτό είναι ένα τριδιαγώνιο σύστημα το οποίο μπορεί να λυθεί αποτελεσματικά με κάποια από τις συνηθισμένες μεθόδους επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος.

Έτσι, για τον προσδιορισμό των εφαπτομένων  $m_0, \dots, m_n$  μπορούμε να δώσουμε αυθαίρετες τιμές σε δύο από αυτές και κατόπιν λύνοντας τα παραπάνω συστήματα να προσδιορίσουμε τις υπόλοιπες. Συνήθως χρησιμοποιούνται συνθήκες για τα ακραία σημεία της καμπύλης παρεμβολής οι οποίες οδηγούν σε συγκεκριμένες τιμές για τις εφαπτομένες  $m_0$  και  $m_n$ . Μία τέτοια συνθήκη είναι η *συνοριακή συνθήκη του Bessel*, σύμφωνα με την οποία οι εφαπτομένες  $m_0$  και  $m_n$  υπολογίζονται με τη μέθοδο του Bessel. Μία άλλη συνθήκη είναι η *τετραγωνική συνθήκη* η οποία απαιτεί να ισχύουν τα εξής:

$$D^2F_0(t_0) = D^2F_0(t_1), D^2F_{n-1}(t_{n-1}) = D^2F_{n-1}(t_n).$$

Τότε, από αυτές τις ισότητες, παίρνουμε:

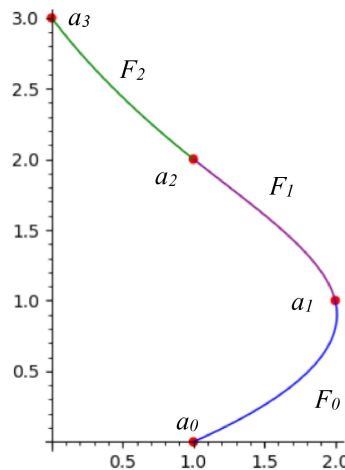
$$m_0 + m_1 = 2 \frac{a_1 - a_0}{t_1 - t_0}, \quad m_{n-1} + m_n = 2 \frac{a_n - a_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}.$$

Μία ακόμη συνθήκη που χρησιμοποιείται συχνά είναι η *φυσική συνοριακή συνθήκη*, σύμφωνα με την οποία οι δεύτερες παράγωγοι στα άκρα της καμπύλης μηδενίζονται και κατά συνέπεια η καμπύλη γίνεται ευθεία στα άκρα της. Ο μηδενισμός των δευτέρων παραγώγων δίνει τις εξισώσεις:

$$2m_0 + m_1 = 3 \frac{a_1 - a_0}{t_1 - t_0}, \quad m_{n-1} + 2m_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}.$$

Έτσι, μπορούμε να αντικαταστήσουμε στο σύστημα τις ποσότητες  $m_0$  και  $m_n$  με τα ίσα τους και να υπολογίσουμε τα διανύσματα  $m_1, \dots, m_{n-1}$ .

**Παράδειγμα 9.9.** Θεωρούμε τα σημεία  $a_0 = (1, 0)$ ,  $a_1 = (2, 1)$ ,  $a_2 = (1, 2)$ ,  $a_3 = (0, 3)$  του  $\mathbb{A}^2$  και τους αριθμούς  $t_0 = 1$ ,  $t_1 = 2$ ,  $t_2 = 3$ ,  $t_3 = 4$ . Θα κατασκευάσουμε μία κατά τμήματα κυβική καμπύλη  $F(t)$  σε μορφή του Hermite τέτοια, ώστε  $F(t_i) = a_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) της οποίας τα τμήματα ενώνονται με παραμετρική συνέχεια  $C^2$  και οι εφαπτομένες στα δύο άκρα ορίζονται από την τετραγωνική συνθήκη.



Σχήμα 9.4: Η κατά τμήματα κυβική καμπύλη  $F(t)$  του Παραδείγματος 9.9.

Διατηρώντας τους συμβολισμούς της ενότητας, έχουμε:  $A_1 = A_2 = A_3 = 1$ ,  $B_2 = B_3 = 2$  και

$$(C_{1,1}, C_{1,2}) = (0, 6), \quad (C_{1,1}, C_{1,2}) = (-6, 6).$$

Επίσης, από την τετραγωνική συνθήκη, έχουμε ότι οι εφαπτομένες στα ακραία σημεία είναι:

$$m_0 = (2 - m_{1,1}, 2 - m_{1,2}) \quad \text{και} \quad m_3 = (-2 - m_{2,1}, 2 - m_{2,2}).$$

Έτσι, προκύπτουν τα εξής δύο συστήματα:

$$3m_{1,1} + m_{2,1} = -2, \quad m_{1,1} + 3m_{2,1} = -4$$

και

$$3m_{1,2} + m_{2,2} = 4, \quad m_{1,2} + 3m_{2,2} = 4.$$

Οι λύσεις τους δίνουν:

$$m_{1,1} = -\frac{1}{4}, \quad m_{2,1} = -\frac{5}{4}, \quad m_{1,2} = 1, \quad m_{2,2} = 1.$$

Επομένως, έχουμε:

$$m_1 = \left(-\frac{1}{4}, 1\right), \quad m_2 = \left(-\frac{5}{4}, 1\right).$$

Επίσης, παίρνουμε:

$$m_0 = \left(\frac{9}{4}, 1\right), \quad m_3 = \left(-\frac{3}{4}, 1\right).$$

Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε τα τμήματα σε μορφή του Hermite της ζητούμενης καμπύλης  $F$ , δηλαδή, τις εξής καμπύλες:

$$\begin{aligned} F_0(t) &= H_0^3[1,2](t)a_0 + H_1^3[1,2](t)m_0 + H_2^3[1,2](t)m_1 + H_3^3[1,2](t)a_1, \\ F_1(t) &= H_0^3[2,3](t)a_1 + H_1^3[2,3](t)m_1 + H_2^3[2,3](t)m_2 + H_3^3[2,3](t)a_2, \\ F_2(t) &= H_0^3[3,4](t)a_2 + H_1^3[3,4](t)m_2 + H_2^3[3,4](t)m_3 + H_3^3[3,4](t)a_3. \end{aligned}$$

Μετά από τους απαραίτητους υπολογισμούς, προκύπτει:

$$\begin{aligned} F_0(t) &= \frac{1}{4}(-5t^2 + 19t - 10, 4t - 4), \\ F_1(t) &= \frac{1}{4}(2t^3 - 17t^2 + 43t - 26, 4t - 4), \\ F_2(t) &= \frac{1}{4}(t^2 - 11t + 28, 4t - 4). \end{aligned}$$

### 9.5 Κυβική $B$ -spline Παρεμβολή

Σ' αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε το πρόβλημα της παρεμβολής με τη χρήση κυβικών  $B$ -spline καμπυλών. Πιο συγκεκριμένα, δίνονται σημεία  $a_0, \dots, a_N \in \mathbb{A}^3$ , πραγματικοί αριθμοί  $u_0 < u_1 < \dots < u_N$  και ζητείται να βρεθεί μία κυβική  $B$ -spline καμπύλη  $F$  τέτοια, ώστε να ισχύει  $F(u_i) = a_i$  ( $i = 0, \dots, N$ ). Τότε, τα τμήματά της  $F$  να ενώνονται με παραμετρική συνέχεια  $C^2$ .

Για να κατασκευάσουμε μία τέτοια καμπύλη θα προσδιορίσουμε τα σημεία ελέγχου του de Boor μίας κυβικής  $B$ -spline καμπύλης η οποία βασίζεται επί της πεπερασμένης ακολουθίας κόμβων βαθμού πολλαπλότητας  $\leq 4$  με  $N - 1$  παρεμβαλλόμενους κόμβους:

$$u_{-3}, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, u_N, u_{N+1}, u_{N+2}, u_{N+3}$$

όπου  $u_{-3} = u_{-2} = u_{-1} = u_0$  και  $u_N = u_{N+1} = u_{N+2} = u_{N+3}$ . Έτσι, έχουμε να υπολογίσουμε τα σημεία ελέγχου  $d_{-3}, d_{-2}, \dots, d_{N-1}$ . Καθώς  $d_{-3} = F(u_0) = a_0$  και  $d_{N-1} = F(u_N) = a_N$ , απομένει να προσδιορίσουμε τα υπόλοιπα σημεία  $d_{-2}, \dots, d_{N-2}$ .

Ας είναι  $F_i : [u_i, u_{i+1}]$  ( $i = 0, \dots, N - 1$ ) τα τμήματα καμπυλών που αποτελούν την καμπύλη  $F$ . Τότε, για κάθε  $t \in [u_i, u_{i+1}]$ , ισχύει:

$$F(t) = F_i(t) = \sum_{j=-3}^{N-1} \mathcal{N}_{j,i}^3(t) d_j.$$

Για τον προσδιορισμό των  $d_{-2}, \dots, d_{N-2}$ , θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις  $F(u_i) = a_i$ . Έτσι, πρέπει να υπολογίσουμε τις τιμές  $\mathcal{N}_{j,i}^3(u_i)$ .

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των συναρτήσεων B-spline, παίρνουμε:

$$\mathcal{N}_j^2(u_i) = \begin{cases} \frac{u_{j+1} - u_j}{u_{j+2} - u_j}, & \text{αν } i = j + 1, \\ \frac{u_{j+3} - u_{j+2}}{u_{j+3} - u_{j+1}}, & \text{αν } i = j + 2, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{i-1}^3(u_i) &= \frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+2} - u_{i-1}} \frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_{i-1}}, \\ \mathcal{N}_{i-2}^3(u_i) &= \frac{u_i - u_{i-2}}{u_{i+1} - u_{i-2}} \frac{u_{i+1} - u_i}{u_{i+1} - u_{i-1}} + \frac{u_{i+2} - u_i}{u_{i+2} - u_{i-1}} \frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_{i-1}}, \\ \mathcal{N}_{i-3}^3(u_i) &= \frac{u_{i+1} - u_i}{u_{i+1} - u_{i-2}} \frac{u_{i+1} - u_i}{u_{i+1} - u_{i-1}}, \\ \mathcal{N}_j^3(u_i) &= 0, \quad \text{για } j \neq i-3, i-2, i-1. \end{aligned}$$

Έτσι, παίρνουμε:

$$a_i = \mathcal{N}_{i-3}^3(u_i)d_{i-3} + \mathcal{N}_{i-2}^3(u_i)d_{i-2} + \mathcal{N}_{i-1}^3(u_i)d_{i-1} \quad (i = 1, \dots, N-1).$$

Οι παραπάνω  $N-1$  ισότητες περιέχουν τα άγνωστα σημεία  $d_{-2}, \dots, d_{N-2}$ . Για τον υπολογισμό τους, επιλέγονται (συνήθως με γεωμετρικά κριτήρια) κάποιες τιμές για τα  $d_{-2}$  και  $d_{N-2}$  και κατόπιν υπολογίζονται τα υπόλοιπα. Για κάθε  $i = 1, \dots, N-1$ , θέτουμε:

$$\begin{aligned} (u_{i+1} - u_{i-1})a_i &= (R_{i,1}, R_{i,2}, R_{i,3}), \quad A_i = \mathcal{N}_{i-3}^3(u_i)(u_{i+1} - u_{i-1}), \\ B_i &= \mathcal{N}_{i-2}^3(u_i)(u_{i+1} - u_{i-1}), \quad C_i = \mathcal{N}_{i-1}^3(u_i)(u_{i+1} - u_{i-1}). \end{aligned}$$

Επίσης, θέτουμε  $d_j = (D_{j+2,1}, D_{j+2,2}, D_{j+2,3})$  ( $j = -2, \dots, N-2$ ). Οπότε, έχουμε τα εξής τρία γραμμικά συστήματα:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & A_{N-1} & B_{N-1} & C_{N-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{0,i} \\ \vdots \\ X_{N,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{0,i} \\ R_{1,i} \\ \vdots \\ R_{N-1,i} \\ D_{N,i} \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Καθένα από αυτά τα συστήματα είναι τριδιαγώνιο και επομένως μπορεί να λυθεί από τις γνωστές μεθόδους επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος. Για κάθε  $i = 1, 2, 3$ , η λύση του αντίστοιχου συστήματος είναι η  $(N+1)$ -άδα  $(D_{0,i}, \dots, D_{N,i})$ . Έτσι, υπολογίζουμε τα σημεία  $d_{-2}, \dots, d_{N-2}$ .

Τέλος, θα δείξουμε μερικούς συνηθισμένους τρόπους επιλογής των  $d_{-2}$  και  $d_{N-2}$ . Η πρώτη μέθοδος είναι γνωστή ως *συννοριακή συνθήκη του Bessel*. Πρώτα, υπολογίζουμε την εφαπτομένη της καμπύλης  $F$  στο  $u_0$  ή πιο συγκεκριμένα του πρώτου τμήματός της,  $F_0 : [u_0, u_1] \rightarrow \mathbb{A}^3$ . Καθώς τα σημεία  $d_{-3}, d_{-2}$  συμπίπτουν με τα δύο πρώτα σημεία ελέγχου της μορφής του Bézier της  $F_0$ , παίρνουμε:

$$DF_0(u_0) = \frac{3}{u_1 - u_0}(d_{-2} - d_{-3}) = \frac{3}{u_1 - u_0}(d_{-2} - a_0).$$

Από την άλλη πλευρά, υπολογίζουμε την καμπύλη  $Q$  που διέρχεται από τα σημεία  $a_0, a_1, a_2$ , χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Aitken, όπως στην προηγούμενη ενότητα. Τότε, έχουμε:

$$\begin{aligned} DQ(u_0) &= \frac{2u_0 - u_1 - u_2}{(u_2 - u_0)(u_1 - u_0)}a_0 + \\ &\quad \frac{u_2 - u_0}{(u_2 - u_1)(u_1 - u_0)}a_1 + \frac{u_0 - u_1}{(u_2 - u_1)(u_2 - u_0)}a_2 \end{aligned}$$

Θέτοντας  $DF_0(u_0) = DQ(u_0)$ , παίρνουμε:

$$d_{-2} = \frac{1}{3} \left( \frac{2u_2 - u_0 - u_1}{u_2 - u_0} a_0 + \frac{u_2 - u_0}{u_2 - u_1} a_1 - \frac{(u_1 - u_0)^2}{(u_2 - u_1)(u_2 - u_0)} a_2 \right).$$

Για την επιλογή του σημείου  $d_{N-2}$  θεωρούμε το τελευταίο τμήμα της καμπύλης  $F, F_{N-1} : [u_{N-1}, u_n] \rightarrow \mathbb{A}^3$ . Τα σημεία  $d_{N-2}$  και  $d_{N-1}$  συμπίπτουν με τα δύο τελευταία σημεία ελέγχου του Βέζιερ της  $F_{N-1}$  και επομένως έχουμε:

$$DF_{N-1}(u_N) = \frac{3}{u_N - u_{N-1}} (d_{N-1} - d_{N-2}) = \frac{3}{u_N - u_{N-1}} (a_N - d_{N-2}).$$

Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Αϊτκεν, υπολογίζουμε την καμπύλη  $S$  που διέρχεται από τα σημεία  $a_{N-2}, a_{N-1}, a_N$ . Τότε, έχουμε:

$$DS(u_N) = \frac{u_N - u_{N-1}}{(u_N - u_{N-2})(u_{N-1} - u_{N-2})} a_{N-2} + \frac{u_{N-2} - u_N}{(u_N - u_{N-1})(u_{N-1} - u_{N-2})} a_{N-1} + \frac{2u_N - u_{N-1} - u_{N-2}}{(u_N - u_{N-1})(u_N - u_{N-2})} a_N.$$

Θέτοντας  $DF_{N-1}(u_N) = DS(u_N)$ , παίρνουμε:

$$d_{N-2} = \frac{1}{3} \left( - \frac{(u_N - u_{N-1})^2}{(u_N - u_{N-2})(u_{N-1} - u_{N-2})} a_{N-2} - \frac{u_{N-2} - u_N}{u_{N-1} - u_{N-2}} a_{N-1} + \frac{u_N + u_{N-1} - 2u_{N-2}}{u_N - u_{N-2}} a_N \right).$$

Μία άλλη γνωστή συνθήκη είναι η τετραγωνική συνοριακή συνθήκη κατά την οποία η δεύτερη παράγωγος του πρώτου τμήματος της καμπύλης παρεμβολής  $F_0$  (αντίστοιχα τελευταίου  $F_{N-1}$ ) να είναι ίση στα άκρα του. Ας είναι  $f_0$  η πολική μορφή της καμπύλης  $F_0$  και  $b_{0,j}$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ) τα σημεία ελέγχου του Βέζιερ της καμπύλης  $F_0$ . Σύμφωνα με την Πρόταση 7.3 ισχύουν τα εξής:

$$D^2F_0(u_0) = \frac{6}{(u_1 - u_0)^2} (b_{0,0} - 2b_{0,1} + b_{0,2})$$

και

$$D^2F_0(u_1) = \frac{6}{(u_1 - u_0)^2} (b_{0,1} - 2b_{0,2} + b_{0,3}).$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} b_{0,0} &= f_0(u_0, u_0, u_0) = a_0, \\ b_{0,1} &= f_0(u_0, u_0, u_1) = f_0(u_{-1}, u_0, u_1) = d_{-2}, \\ b_{0,2} &= f_0(u_0, u_1, u_1), \\ b_{0,3} &= f_0(u_1, u_1, u_1) = a_1. \end{aligned}$$

Θα εκφράσουμε το σημείο  $b_{0,2}$  ως ομοπαράλληλο συνδυασμό των σημείων  $d_{-2}$  και  $d_{-1} = f_0(u_0, u_1, u_2)$ . Καθώς ισχύει

$$u_1 = \frac{u_2 - u_1}{u_2 - u_0} u_0 + \frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_0} u_2,$$

έχουμε

$$\begin{aligned} b_{0,2} &= \frac{u_2 - u_1}{u_2 - u_0} f_0(u_0, u_0, u_1) + \frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_0} f_0(u_0, u_1, u_2) \\ &= \frac{u_2 - u_1}{u_2 - u_0} d_{-2} + \frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_0} d_{-1}. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, θέτουμε  $D^2F_0(u_0) = D^2F_0(u_1)$ . Ισοδύναμα έχουμε

$$b_{0,0} + 3b_{0,2} = 3b_{0,1} + b_{0,3},$$

απ' όπου αντικαθιστώντας τα ίσα των  $b_{0,j}$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ), τελικά παίρνουμε:

$$d_{-2} = d_{-1} + \frac{u_2 - u_0}{3(u_1 - u_0)}(a_0 - a_1).$$

Εργαζόμενοι ομοίως με το τελευταίο κομμάτι  $F_{N-1}$  της καμπύλης  $F$ , θέτοντας  $D^2F_{N-1}(u_{N-1}) = D^2F_{N-1}(u_N)$ , προκύπτει:

$$d_{N-2} = d_{N-3} + \frac{u_N - u_{N-2}}{u_N - u_{N-1}}(a_{N-1} - a_N).$$

Αντικαθιστώντας τα  $d_{-2}, d_{N-2}$  με τα ίσα τους στο αντίστοιχο σύστημα, το λύνουμε και προσδιορίζουμε τα σημεία  $d_{-2}, \dots, d_{N-2}$ .

Τέλος, μία άλλη συχνά χρησιμοποιούμενη συνθήκη είναι η φυσική συνοριακή συνθήκη η οποία απαιτεί οι δεύτερες παράγωγοι στα άκρα της καμπύλης παρεμβολής  $F$  να είναι μηδέν, δηλαδή  $D^2F_0(u-0) = D^2F_{N-1}(u_N) = 0$ . Τότε, έχουμε τις ισότητες:

$$(u_2 + u_1 - 2u_0)d_{-2} - (u_1 - u_0)d_{-1} = (u_2 - u_0)a_0$$

και

$$(u_N - u_{N-1})d_{N-3} - (2u_N - u_{N-1} - u_{N-2})d_{N-2} = -(u_N - u_{N-2})a_N.$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις σχέσεις και το αντίστοιχο σύστημα προσδιορίζουμε τα σημεία  $d_{-2}, \dots, d_{N-2}$ .

**Παράδειγμα 9.10.** Θεωρούμε τα σημεία  $a_0 = (0, 1, 0)$ ,  $a_1 = (1, 1, 1)$ ,  $a_2 = (2, 1, -1)$ ,  $a_3 = (1, 2, 0)$  και τους πραγματικούς αριθμούς  $u_i = i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ). Θα κατασκευάσουμε μία κυβική B-spline καμπύλη  $F$  με  $F(i) = a_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ), χρησιμοποιώντας την παραπάνω μέθοδο και τη φυσική συνοριακή συνθήκη.

Θα υπολογίσουμε τα σημεία ελέγχου του de Boor,  $d_j$  ( $j = -3, \dots, 2$ ) της  $F$ . Έχουμε αμέσως  $d_{-3} = a_0$  και  $d_2 = a_3$ . Η φυσική συνοριακή συνθήκη μας δίνει τις εξής ισότητες:

$$d_{-2} = \frac{2}{3}a_0 + \frac{1}{3}d_{-1}, \quad d_1 = \frac{1}{3}d_0 + \frac{2}{3}a_3.$$

Στη συνέχεια, διατηρώντας τους συμβολισμούς της παρούσης ενότητας, υπολογίζουμε:

$$A_1 = \frac{1}{2}, \quad A_2 = \frac{1}{3}, \quad B_1 = \frac{5}{6}, \quad B_2 = \frac{5}{6}, \quad C_1 = \frac{1}{3}, \quad C_2 = \frac{1}{2}.$$

Επιπλέον, έχουμε τις ισότητες:

$$\begin{aligned} A_1d_{-2} + B_1d_{-1} + C_1d_0 &= 2a_1, \\ A_2d_{-1} + B_2d_0 + C_2d_1 &= 2a_2. \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε:

$$\begin{aligned} d_{-1} + \frac{1}{3}d_0 &= 2a_1 - \frac{1}{3}a_0, \\ \frac{1}{3}d_{-1} + d_0 &= 2a_2 - \frac{1}{3}a_3, \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει:

$$d_0 = \frac{3}{8}(27, 7, -24), \quad d_{-1} = \left(\frac{43}{8}, \frac{61}{24}, -1\right).$$

Στη συνέχεια παίρνουμε:

$$d_{-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{43}{8}, \frac{109}{24}, -1\right), \quad d_1 = \left(\frac{97}{24}, \frac{53}{24}, -3\right).$$

Στην πράξη, τα δεδομένα ενός προβλήματος κατασκευής μίας καμπύλης παρεμβολής περιλαμβάνουν μόνο τα σημεία παρεμβολής  $a_0, \dots, a_N$  και όχι την ακολουθία των κόμβων  $u_0, \dots, u_N$ . Έτσι, χρησιμοποιούνται συγκεκριμένες μέθοδοι για την παραγωγή των κόμβων οι οποίες καλούνται *παραμετροποιήσεις*. Η απλούστερη παραμετροποίηση είναι η επιλογή μίας ομοιόμορφης ακολουθίας κόμβων η οποία συχνά οδηγεί στην κατασκευή μίας αποδεκτής καμπύλης παρεμβολής. Στην περίπτωση όμως όπου τα σημεία παρεμβολής βρίσκονται σχετικά κοντά μεταξύ τους, το αποτέλεσμα ενδέχεται να μην είναι ικανοποιητικό. Μία άλλη γνωστή παραμετροποίηση είναι η *παραμετροποίηση μήκους χορδής* κατά την οποία οι αποστάσεις μεταξύ των κόμβων είναι ανάλογες προς τις αποστάσεις των αντίστοιχων σημείων παρεμβολής. Έτσι, μετά την επιλογή του  $u_0$ , οι άλλοι κόμβοι ορίζονται ώστε να ισχύει:

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{u_{i+2} - u_{i+1}} = \frac{\|a_{i+1} - a_i\|}{\|a_{i+2} - a_{i+1}\|}.$$

Τέλος, μία άλλη συχνά χρησιμοποιούμενη παραμετροποίηση είναι η *κεντρομόλος παραμετροποίηση* κατά την οποία οι αποστάσεις μεταξύ των κόμβων είναι ανάλογες προς την τετραγωνική ρίζα των αποστάσεων των αντίστοιχων σημείων παρεμβολής. Έτσι, μετά την επιλογή του  $u_0$ , οι άλλοι κόμβοι επιλέγονται ώστε να ισχύει:

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{u_{i+2} - u_{i+1}} = \left( \frac{\|a_{i+1} - a_i\|}{\|a_{i+2} - a_{i+1}\|} \right)^{1/2}.$$

## Ασκήσεις

- 9.5.1** Ας είναι  $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{A}^3$  και  $t_0, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$  με  $t_0 < t_1 < t_2 < t_3$ . Αν  $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^3$  είναι μία κυβική καμπύλη τέτοια, ώστε  $F(t_i) = a_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ), τότε να εκφραστούν τα σημεία ελέγχου της μορφής του Bézier της  $F$  με τη βοήθεια των  $t_1, t_2$  και  $a_0, a_1, a_2, a_3$ .
- 9.5.2** Ας είναι  $a_0 = (1, 0, 0)$ ,  $a_1 = (1, 0, 1)$ ,  $a_2 = (1, 1, 0)$ ,  $a_3 = (2, 1, 1)$  και  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 2$ ,  $t_2 = 3$ ,  $t_3 = 5$ . Αν  $F$  είναι η μοναδική κυβική καμπύλη με  $F(t_i) = a_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ), τότε να υπολογιστεί με τη χρήση του αλγορίθμου του Aitken η τιμή  $F(4)$ .
- 9.5.3** Ας είναι  $a_0 = (1, -1, 0)$ ,  $a_1 = (1, 0, 1)$ ,  $a_2 = (1, 2, 1)$ ,  $a_3 = (0, 1, 2)$  και  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2$ ,  $t_3 = 3$ . Να βρεθεί, με τη χρήση των πολωνύμων του Lagrange, η μοναδική κυβική καμπύλη  $F$  με  $F(t_i) = a_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ). Κατόπιν, να υπολογιστούν τα σημεία ελέγχου του Bézier της  $F$ .
- 9.5.4** Ας είναι  $\{F_0, \dots, F_n\}$  μία βάση του διανυσματικού χώρου  $\mathbb{R}_n[t]$ . Αν  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{A}^3$  και  $t_0, \dots, t_n \in \mathbb{R}$  με  $t_0 < \dots < t_n$ , τότε να δειχθεί ότι υπάρχει μοναδική πολωνυμική καμπύλη βαθμού  $n$ ,  $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^3$ , της μορφής

$$F(t) = \sum_{i=0}^n F_i(t)c_i,$$

όπου  $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{A}^3$ , ώστε να ισχύει  $F(t_i) = a_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ).

- 9.5.5** Ας είναι  $a_0, a_1 \in \mathbb{A}^3$  και  $u_0, u_1, v_0, v_1 \in \mathbb{R}^3$ . Να δειχθεί ότι υπάρχει μία μοναδική καμπύλη πέμπτου βαθμού  $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^3$  τέτοια, ώστε να ισχύουν τα εξής:

$$F(0) = a_0, \quad F(1) = a_1, \quad DF(0) = u_0,$$

$$DF(1) = u_1, \quad D^2F(0) = v_0, \quad D^2F(1) = v_1$$

και να υπολογιστούν τα σημεία ελέγχου της μορφής του Bézier της  $F$ . Επίσης, να δειχθεί ότι

$$F(t) = a_0H_0^5(t) + u_0H_1^5(t) + v_0H_2^5(t) + v_1H_3^5(t) + u_1H_4^5(t) + a_1H_5^5(t),$$

όπου

$$\begin{aligned} H_0^5(t) &= B_0^5(t) + B_1^5(t) + b_2^5(t), \\ H_1^5(t) &= \frac{1}{5}(B_1^5(t) + 2B_2^5(t)), \\ H_2^5(t) &= \frac{1}{20}B_2^5(t), \\ H_3^5(t) &= \frac{1}{20}B_3^5(t), \\ H_4^5(t) &= -\frac{1}{5}(2B_3^5(t) + B_4^5(t)), \\ H_5^5(t) &= B_3^5(t) + B_4^5(t) + B_5^5(t). \end{aligned}$$

Τα πολώνυμα  $H_i^5(t)$  καλούνται πολώνυμα του Hermite πέμπτου βαθμού.

- 9.5.6** Δίνονται τα σημεία  $a_0 = (1, 0, 1)$ ,  $a_1 = (1, 2, 1)$ ,  $a_2 = (1, -1, 2)$ ,  $a_3 = (1, -1, -1)$ ,  $a_4 = (2, -1, 2)$  και οι πραγματικοί αριθμοί  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 2$ ,  $t_2 = 3$ ,  $t_3 = 5$ ,  $t_4 = 6$ . Να κατασκευαστεί μία κατά τμήματα κυβική πολωνυμική καμπύλη σε μορφή Hermite  $F$  τέτοια, ώστε  $F(t_i) = a_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3, 4$ ) της οποίας τα τμήματα να ενώνονται με παραμετρική συνέχεια  $C^2$  και οι εφαπτομένες στα ακραία σημεία να δίνονται από την τετραγωνική συνθήκη.
- 9.5.7** Δίνονται τα σημεία  $a_0 = (1, 0)$ ,  $a_1 = (2, 1)$ ,  $a_2 = (1, -1)$ ,  $a_3 = (0, -1)$  και οι πραγματικοί αριθμοί  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 2$ ,  $t_2 = 3$ ,  $t_3 = 5$ . Να κατασκευαστεί, με τη χρήση της συνοριακής συνθήκης του Bessel, μία κυβική B-spline καμπύλη  $F$  τέτοια, ώστε  $F(t_i) = a_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ).
- 9.5.8** Δίνονται τα σημεία  $a_0 = (1, -1, 0)$ ,  $a_1 = (2, 0, -1)$ ,  $a_2 = (2, 1, 1)$ ,  $a_3 = (1, -1, 2)$ ,  $a_4 = (0, -1, 3)$  και οι πραγματικοί αριθμοί  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 2$ ,  $u_2 = 3$ ,  $u_3 = 5$ ,  $u_4 = 6$ . Να κατασκευαστεί, με τη χρήση της τετραγωνικής συνοριακής συνθήκης μία κυβική B-spline καμπύλη  $F$  τέτοια, ώστε  $F(u_i) = a_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3, 4$ ). Επίσης, να υπολογιστούν τα σημεία ελέγχου του Bézier των επιμέρους τμημάτων της  $F$ .
- 9.5.9** Δίνονται τα σημεία  $a_0 = (0, -1, 0)$ ,  $a_1 = (2, 0, 1)$ ,  $a_2 = (1, 1, 1)$ ,  $a_3 = (1, -1, 0)$ ,  $a_4 = (0, 1, 1)$ ,  $a_5 = (1, -1, -1)$ . Χρησιμοποιώντας την παραμετροποίηση μήκους χορδής, να κατασκευαστεί μία ακολουθία κόμβων  $u_0, \dots, u_5$  και στη συνέχεια μία κυβική B-spline καμπύλη  $F$  με  $F(u_i) = a_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ).
- 9.5.10** Ας είναι  $a_0 = (0, -1, -1)$ ,  $a_1 = (1, -0, 1)$ ,  $a_2 = (1, 1, -1)$ ,  $a_3 = (1, -1, 0)$ ,  $a_4 = a_0$  και  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 2$ ,  $u_2 = 3$ ,  $u_3 = 5$ ,  $u_4 = 6$ . Να κατασκευαστεί μία κυκλική κυβική B-spline καμπύλη  $F$  με  $F(u_i) = a_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3, 4$ ).

## Βιβλιογραφία

- [1] G. Farine. *Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design, A practical Guide*. San Diego: Academic Press, 1997.
- [2] G.D. Knott. *Interpolating Cubic Splines*. Birkhäuser, 2000.
- [3] R.J.Y. McLeod και M.L. Baart. *Geometry and Interpolation of Curves and Surfaces*. Cambridge University Press, 1998.
- [4] M.E. Mortenson. *Geometric Modelling*. Industrial Press Inc, 2006.
- [5] Θ. Θεοχάρης και Α. Μπεμ. *Γραφικά. Αρχές και Αλγόριθμοι*. Εκδόσεις Συμμετρία, 1999.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

# ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

### Σύνοψη

Σ' αυτό το κεφάλαιο δίνουμε μία εισαγωγή στη μελέτη των πολυωνυμικών επιφανειών. Χαρακτηρίζουμε τις επιφάνειες ως επιφάνειες ολικού βαθμού και διπολυωνυμικές επιφάνειες σε σχέση με τον τρόπο κατά τον οποίο έχουμε ορίσει τις πολικές μορφές τους. Για τον καθένα από αυτούς τους δύο τρόπους παρουσιάζουμε μία εκδοχή του αλγορίθμου του de Casteljaeu και του αλγορίθμου υποδιαίρεσης. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τις επιφάνειες, ο αναγνώστης μπορεί να συμβουλευτεί τα συγγράμματα τα οποία παρατίθενται στο τέλος του κεφαλαίου.

### 10.1 Επιφάνειες Ολικού Βαθμού σε Πολική Μορφή

Σ' αυτή την ενότητα θα ορίσουμε τις επιφάνειες με τρόπο ανάλογο με αυτό που ορίσαμε τις πολυωνυμικές καμπύλες στην Ενότητα 6.1. Ας είναι  $\mathcal{E}$  ομοπαράλληλος χώρος πεπερασμένης διάστασης  $\geq 3$  και  $\mathcal{P} = \mathbb{A}^2$ .

**Ορισμός 10.1.** Μία πολυωνυμική επιφάνεια ολικού βαθμού  $m$  σε πολική μορφή είναι μία ομοπαράλληλική πολυωνυμική απεικόνιση  $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}$  πολικού βαθμού  $m$ . Το σύνολο  $F(\mathcal{P})$  καλείται ίχνος της  $F$ .

**Παράδειγμα 10.1.** Θεωρούμε την απεικόνιση

$$F : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{A}^3, (x, y) \longmapsto (x, y, x^2 - y^2).$$

Η απεικόνιση αυτή είναι μία πολυωνυμική επιφάνεια ολικού βαθμού 2 σε πολική μορφή. Πράγματι, η απεικόνιση

$$f : \mathcal{P}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^3, ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \longmapsto \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, x_1x_2 - y_1y_2 \right)$$

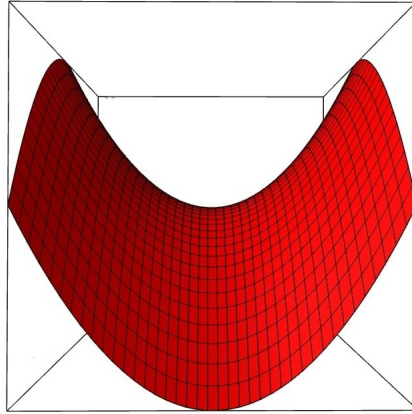
είναι μία συμμετρική, 2-ομοπαράλληλική απεικόνιση τέτοια, ώστε για κάθε  $(x, y) \in \mathcal{P}$  ισχύει:

$$f((x, y), (x, y)) = F(x, y).$$



Άρα, η  $F$  είναι μία πολυωνυμική επιφάνεια πολικού βαθμού 2 η οποία καλείται υπερβολικό παραβολοειδές. Όπως, μπορούμε εύκολα να δούμε, το ίχνος της  $F$  είναι το σύνολο των σημείων  $(x, y, z) \in \mathbb{A}^3$  τα οποία επαληθεύουν την εξίσωση

$$z = x^2 - y^2.$$



Σχήμα 10.1: Η επιφάνεια υπερβολικό παραβολοειδές του Παραδείγματος 10.1

**Ορισμός 10.2.** Καλούμε τρίγωνο αναφοράς του  $\mathcal{P}$  κάθε ομοπαράλληλο πλαίσιο  $(r, s, t)$  του  $\mathcal{P}$  και το συμβολίζουμε με  $\Delta rst$ .

Ας είναι  $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}$  μία πολυωνυμική επιφάνεια ολικού βαθμού  $m$  σε πολική μορφή. Τότε, υπάρχει μία συμμετρική  $m$ -ομοπαράλληλη απεικόνιση

$$f : \mathcal{P}^m \longrightarrow \mathcal{E}$$

τέτοια, ώστε για κάθε  $x \in \mathcal{P}$  να ισχύει

$$F(x) = f(x, \dots, x).$$

Ας είναι  $\Delta rst$  ένα τρίγωνο αναφοράς του  $\mathcal{P}$  και  $a_1, \dots, a_m \in \mathcal{P}$ . Για κάθε  $i = 1, \dots, m$  υπάρχει  $(\lambda_i, \mu_i, \nu_i) \in \mathbb{R}^3$  με  $\lambda_i + \mu_i + \nu_i = 1$  έτσι, ώστε

$$a_i = \lambda_i r + \mu_i s + \nu_i t.$$

Τότε, καθώς η  $f$  είναι πολυομοπαράλληλη, έχουμε:

$$\begin{aligned} f(a_1, \dots, a_m) &= f(\lambda_1 r + \mu_1 s + \nu_1 t, \dots, \lambda_m r + \mu_m s + \nu_m t) \\ &= \lambda_1 f(r, \lambda_2 r + \mu_2 s + \nu_2 t, \dots, \lambda_m r + \mu_m s + \nu_m t) \\ &\quad + \mu_1 f(s, \lambda_2 r + \mu_2 s + \nu_2 t, \dots, \lambda_m r + \mu_m s + \nu_m t) \\ &\quad + \nu_1 f(t, \lambda_2 r + \mu_2 s + \nu_2 t, \dots, \lambda_m r + \mu_m s + \nu_m t). \end{aligned}$$

Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο, η πολυομοπαράλληλότητα και η συμμετρία της  $f$  δίνουν:

$$f(a_1, \dots, a_m) = \sum_{\substack{\alpha+\beta+\gamma=m \\ \alpha, \beta, \gamma \in \{0, \dots, m\}}} c_{\alpha, \beta, \gamma}(a_1, \dots, a_m) \underbrace{f(r, \dots, r)}_{\alpha} \underbrace{f(s, \dots, s)}_{\beta} \underbrace{f(t, \dots, t)}_{\gamma},$$

όπου

$$c_{\alpha, \beta, \gamma}(a_1, \dots, a_m) = \sum_{\substack{I \cup J \cup K = \{1, \dots, m\} \\ |I| = \alpha, |J| = \beta, |K| = \gamma}} \left( \prod_{i \in I} \lambda_i \right) \left( \prod_{j \in J} \mu_j \right) \left( \prod_{k \in K} \nu_k \right).$$

Οι συντελεστές  $c_{\alpha,\beta,\gamma}(a_1, \dots, a_m)$  ορίζουν συμμετρικές  $m$ -ομοπαράλληλικές απεικονίσεις  $c_{\alpha,\beta,\gamma} : \mathcal{P}^m \rightarrow \mathbb{R}$ . Η συμμετρία αυτών των απεικονίσεων είναι προφανής. Θα δείξουμε ότι είναι  $m$ -ομοπαράλληλικές απεικονίσεις. Πρώτα παρατηρούμε ότι

$$c_{\alpha,\beta,\gamma}(a_1, \dots, a_m) = A_{\alpha,\beta,\gamma}\lambda_1 + B_{\alpha,\beta,\gamma}\mu_1 + \Gamma_{\alpha,\beta,\gamma}\nu_1,$$

όπου οι τιμές  $A_{\alpha,\beta,\gamma}, B_{\alpha,\beta,\gamma}, \Gamma_{\alpha,\beta,\gamma}$  είναι συναρτήσεις των  $\lambda_i, \mu_i, \nu_i$  ( $i = 2, \dots, m$ ) (και επομένως των  $a_2, \dots, a_m, r, s, t$ ). Ας είναι  $(u_j, \gamma_j)$  ( $j = 1, \dots, k$ ) βεβαρημένα σημεία του  $\mathcal{P}$  με  $u_j = \sigma_j r + \tau_j s + \nu_j t$  και  $\gamma_1 + \dots + \gamma_k = 1$ . Συμβολίζουμε με  $g$  το βαρύκεντρό τους. Από την Πρόταση 1.15 έπεται ότι οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες του  $g$  ως προς το  $\Delta rst$  είναι η τριάδα

$$\left( \sum_{j=1}^k \gamma_j \sigma_j, \sum_{j=1}^k \gamma_j \tau_j, \sum_{j=1}^k \gamma_j \nu_j \right).$$

Επομένως, έχουμε:

$$\begin{aligned} c_{\alpha,\beta,\gamma}(g, a_2, \dots, a_m) &= A_{\alpha,\beta,\gamma} \sum_{j=1}^k \gamma_j \sigma_j + B_{\alpha,\beta,\gamma} \sum_{j=1}^k \gamma_j \tau_j + \Gamma_{\alpha,\beta,\gamma} \sum_{j=1}^k \gamma_j \nu_j \\ &= \sum_{j=1}^k \gamma_j (A_{\alpha,\beta,\gamma} \sigma_j + B_{\alpha,\beta,\gamma} \tau_j + \Gamma_{\alpha,\beta,\gamma} \nu_j) \\ &= \sum_{j=1}^k \gamma_j c_{\alpha,\beta,\gamma}(u_j, a_2, \dots, a_m). \end{aligned}$$

Επομένως, η αντιστοιχία  $a_1 \mapsto c_{\alpha,\beta,\gamma}(a_1, \dots, a_m)$  ορίζει μία ομοπαράλληλική απεικόνιση από  $\mathcal{P}$  στο  $\mathbb{R}$ . Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι αυτό συμβαίνει και με τις άλλες μεταβλητές. Άρα, η απεικόνιση  $c_{\alpha,\beta,\gamma}$  είναι  $m$ -ομοπαράλληλική απεικόνιση.

Η τιμή

$$f(\underbrace{r, \dots, r}_\alpha, \underbrace{s, \dots, s}_\beta, \underbrace{t, \dots, t}_\gamma)$$

εμφανίζεται στο άθροισμα

$$\binom{m}{\alpha, \beta, \gamma} = \frac{m!}{\alpha! \beta! \gamma!}$$

φορές. Οπότε, για κάθε  $a \in \mathcal{P}$ , με  $a = \lambda r + \mu s + \nu t$  και  $\lambda + \mu + \nu = 1$ , έχουμε:

$$F(a) = f(a, \dots, a) = \sum_{i+j+k=m} \frac{m!}{i!j!k!} \lambda^i \mu^j \nu^k f(\underbrace{r, \dots, r}_i, \underbrace{s, \dots, s}_j, \underbrace{t, \dots, t}_k).$$

**Ορισμός 10.3.** Τα πολώνυμα της μορφής

$$B_{i,j,k}^m(U, V, T) = \frac{m!}{i!j!k!} U^i V^j T^k,$$

με  $i+j+k = m$ , καλούνται πολώνυμα του Bernstein. Τα  $(m+1)(m+2)/2$  σημεία της μορφής  $f(r, \dots, r, s, \dots, s, t, \dots, t)$  καλούνται σημεία ελέγχου της επιφάνειας  $F$  ως προς το τρίγωνο αναφοράς  $\Delta rst$ .

Ας θεωρήσουμε τώρα το σύνολο

$$\Delta_m = \{(i, j, k) \in \mathbb{N}^3 / i + j + k = m\}.$$

**Ορισμός 10.4.** Μία οικογένεια σημείων του  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{N} = (b_{i,j,k})_{(i,j,k) \in \Delta_m}$ , καλείται *τριγωνικό δίκτυο ελέγχου βαθμού  $m$* .

Ας σημειωθεί ότι ένα τριγωνικό δίκτυο ελέγχου βαθμού  $m$  περιέχει ακριβώς  $(m+1)(m+2)/2$  σημεία.

Ας είναι  $(b_{i,j,k})_{(i,j,k) \in \Delta_m}$  ένα τριγωνικό δίκτυο ελέγχου του  $\mathcal{E}$ . Για κάθε  $m$ -άδα σημείων  $(a_1, \dots, a_m) \in \mathcal{E}^m$  με  $a_i = \lambda_i r + \mu_i s + \nu_i t$ , όπου  $\lambda_i, \mu_i, \nu_i \in \mathbb{R}$  με  $\lambda_i + \mu_i + \nu_i = 1$ , θέτουμε:

$$f(a_1, \dots, a_m) = \sum_{\substack{\alpha+\beta+\gamma=m \\ \alpha,\beta,\gamma \in \{0,\dots,m\}}} c_{\alpha,\beta,\gamma}(a_1, \dots, a_m) b_{\alpha,\beta,\gamma}.$$

Καθώς

$$\sum_{\substack{\alpha+\beta+\gamma=m \\ \alpha,\beta,\gamma \in \{0,\dots,m\}}} c_{\alpha,\beta,\gamma}(a_1, \dots, a_m) = \prod_{j=1}^m (\lambda_j + \mu_j + \nu_j) = 1,$$

το  $f(a_1, \dots, a_m)$  είναι ένας βαρυνκεντρικός συνδυασμός των σημείων  $b_{i,j,k}$  και κατά συνέπεια ένα σημείο του  $\mathcal{E}$ . Έτσι, ορίζουμε μία απεικόνιση  $f : \mathcal{P}^m \rightarrow \mathcal{E}$ . Παρατηρούμε αμέσως ότι η  $f$  είναι συμμετρική. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε την πολυμοπαλληλικότητα των απεικονίσεων  $c_{\alpha,\beta,\gamma}$  και αποδεικνύουμε ότι η απεικόνιση  $f$  είναι  $m$ -ομοπαλληλική, όπως κάναμε και στην αντίστοιχη περίπτωση για τις πολυωνυμικές καμπύλες στην Ενότητα 6.1. Έτσι, έχουμε την πολυωνυμική επιφάνεια πολικού βαθμού  $m$ ,  $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}$ , με

$$F(a) = f(a, \dots, a) = \sum_{(i,j,k) \in \Delta_m} B_{i,j,k}^m(\lambda, \mu, \nu) b_{i,j,k}$$

για κάθε  $a = \lambda r + \mu s + \nu t$  (όπου  $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$  με  $\lambda + \mu + \nu = 1$ ).

Συνοψίζουμε τα παραπάνω στην επόμενη πρόταση:

**Πρόταση 10.1.** Ας είναι  $\Delta rst$  ένα τρίγωνο αναφοράς του  $\mathcal{P}$ . Αν  $f : \mathcal{P}^m \rightarrow \mathcal{E}$  είναι μία συμμετρική  $m$ -ομοπαλληλική απεικόνιση, τότε, για κάθε  $(a_1, \dots, a_m) \in \mathcal{P}^m$ , έχουμε:

$$f(a_1, \dots, a_m) = \sum_{\substack{\alpha+\beta+\gamma=m \\ \alpha,\beta,\gamma \in \{0,\dots,m\}}} c_{\alpha,\beta,\gamma}(a_1, \dots, a_m) b_{\alpha,\beta,\gamma},$$

όπου

$$b_{i,j,k} = f(\underbrace{r, \dots, r}_i, \underbrace{s, \dots, s}_j, \underbrace{t, \dots, t}_k).$$

Αντιστρόφως, αν  $(b_{i,j,k})_{(i,j,k) \in \Delta_m}$  είναι ένα τριγωνικό δίκτυο ελέγχου του  $\mathcal{E}$ , τότε, υπάρχει μία μοναδική συμμετρική  $m$ -ομοπαλληλική απεικόνιση  $f : \mathcal{P}^m \rightarrow \mathcal{E}$  τέτοια, ώστε

$$f(\underbrace{r, \dots, r}_i, \underbrace{s, \dots, s}_j, \underbrace{t, \dots, t}_k) = b_{i,j,k}.$$

Η αντίστοιχη πολυωνυμική επιφάνεια ολικού βαθμού  $m$  σε πολική μορφή,  $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}$ , ορίζεται από τη σχέση

$$F(a) = f(a, \dots, a) = \sum_{(i,j,k) \in \Delta_m} B_{i,j,k}^m(\lambda, \mu, \nu) b_{i,j,k}$$

για κάθε  $a = \lambda r + \mu s + \nu t$  με  $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$  και  $\lambda + \mu + \nu = 1$ .

**Παράδειγμα 10.2.** Η τριάδα σημείων  $(E_0, E_1, E_2)$ , όπου  $E_0 = (0, 0)$ ,  $E_1 = (1, 0)$ ,  $E_2 = (0, 1)$ , αποτελεί ένα τρίγωνο αναφοράς του  $\mathcal{P}$ . Τα σημεία

$$b_{2,0,0} = (1, 0, 1), \quad b_{0,2,0} = (1, 1, 1), \quad b_{0,0,2} = (0, 0, 1),$$

$$b_{1,1,0} = (2, -1, 1), \quad b_{1,0,1} = (1, 1, -1), \quad b_{0,1,1} = (1, 0, 2)$$

αποτελούν ένα τριγωνικό δίκτυο ελέγχου βαθμού 2 του  $\mathbb{A}^3$ . Η αντίστοιχη πολυωνυμική επιφάνεια του  $\mathbb{A}^3$  που αντιστοιχεί σε αυτό δίνεται από τη σχέση

$$F(u, v) = \sum_{(i,j,k) \in \Delta_2} B_{i,j,k}^2 (1 - u - v, u, v) b_{i,j,k},$$

ή πιο αναλυτικά

$$F(u, v) = (-2u^2 - v^2 - 2uv - 2u + 1, 3u^2 - 2v^2 - 2u + 2v, 4v^2 + 6uv - 4v + 1).$$

Στη συνέχεια δίνουμε έναν χαρακτηρισμό των πολυωνυμικών επιφανειών ανάλογο με αυτόν που δώσαμε για τις πολυωνυμικές καμπύλες στο Θεώρημα 6.2.

**Θεώρημα 10.1.** *Ας είναι  $\mathcal{E}$  ένας ομοπαράλληλικός χώρος διάστασης  $n \geq 3$  και  $(a_0, \dots, a_{n+1})$  ένα ομοπαράλληλικό πλαίσιο του. Θέτουμε  $\vec{e}_i = \overline{a_0 a_i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Η απεικόνιση  $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}$  ορίζει μία πολυωνυμική επιφάνεια πολικού βαθμού  $m$ , αν και μόνον αν, υπάρχουν πολώνυμα  $F_i(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$  ( $i = 1, \dots, n$ ) με  $m \geq \max\{\deg F_1, \dots, \deg F_n\}$  έτσι, ώστε για κάθε  $(u, v) \in \mathcal{P}$  να ισχύει:*

$$F(u, v) = a_0 + F_1(u, v)\vec{e}_1 + \dots + F_n(u, v)\vec{e}_n.$$

*Απόδειξη.* Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν  $F_i(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$  ( $i = 1, \dots, n$ ) με  $m \geq \max\{\deg F_1, \dots, \deg F_n\}$  έτσι, ώστε για κάθε  $(u, v) \in \mathcal{P}$  να ισχύει:

$$F(u, v) = a_0 + F_1(u, v)\vec{e}_1 + \dots + F_n(u, v)\vec{e}_n.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 6.4, για κάθε  $i = 1, \dots, n$  υπάρχει μία συμμετρική  $m$ -ομοπαράλληλική απεικόνιση  $f_i : \mathcal{P}^m \rightarrow \mathbb{A}$  τέτοια, ώστε

$$F_i(z) = f_i(z, \dots, z), \quad \text{για κάθε } z \in \mathcal{P}.$$

Θεωρούμε την απεικόνιση  $f : \mathcal{P}^m \rightarrow \mathcal{E}$  η οποία ορίζεται από τη σχέση:

$$f(z_1, \dots, z_m) = a_0 + f_1(z_1, \dots, z_m)\vec{e}_1 + \dots + f_n(z_1, \dots, z_m)\vec{e}_n,$$

για κάθε  $(z_1, \dots, z_m) \in \mathcal{P}^m$ . Καθώς οι απεικονίσεις  $f_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) είναι συμμετρικές, η απεικόνιση  $f$  είναι επίσης συμμετρική. Επιπλέον, ισχύει:

$$F(z) = f(z, \dots, z), \quad \text{για κάθε } z \in \mathcal{P}.$$

Επίσης, αποδεικνύεται ότι η  $f$  είναι  $m$ -ομοπαράλληλική με τον ίδιο τρόπο όπως και η αντίστοιχη απεικόνιση στο Θεώρημα 6.2 όπου μελετήθηκε η περίπτωση των πολυωνυμικών καμπυλών. Άρα, η απεικόνιση  $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}$  ορίζει μία πολυωνυμική επιφάνεια πολικού βαθμού  $m$ .

Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι η απεικόνιση  $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}$  ορίζει μία πολυωνυμική επιφάνεια πολικού βαθμού  $m$ . Τότε, υπάρχει μία συμμετρική  $m$ -ομοπαράλληλική απεικόνιση  $f : \mathcal{P}^m \rightarrow \mathcal{E}$  τέτοια, ώστε να ισχύει

$$F(z) = f(z, \dots, z), \quad \text{για κάθε } z \in \mathcal{P}.$$

Ας είναι  $z = (u, v) \in \mathcal{P}$ . Θεωρούμε το ομοπαράλληλο πλαίσιο  $r = (0, 0), s = (1, 0), t = (0, 1)$  του  $\mathcal{P}$ . Τότε  $z = (1 - u - v)r + us + vt$  και επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση 10.1, ισχύει:

$$F(z) = \sum_{(i,j,k) \in \Delta_m} B_{i,j,k}^m(1 - u - v, u, v) b_{i,j,k},$$

όπου

$$b_{i,j,k} = f(\underbrace{r, \dots, r}_i, \underbrace{s, \dots, s}_j, \underbrace{t, \dots, t}_k).$$

Γράφουμε:

$$b_{i,j,k} = a_0 + b_{i,j,k}^{(1)} \vec{e}_1 + \dots + b_{i,j,k}^{(n)} \vec{e}_n,$$

όπου  $b_{i,j,k}^{(1)}, \dots, b_{i,j,k}^{(n)} \in \mathbb{R}$  και  $(i, j, k) \in \Delta_m$ . Έτσι, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} F(z) &= a_0 + \sum_{(i,j,k) \in \Delta_m} B_{i,j,k}^m(1 - u - v, u, v) (b_{i,j,k}^{(1)} \vec{e}_1 + \dots + b_{i,j,k}^{(n)} \vec{e}_n) \\ &= a_0 + \sum_{l=1}^n \left( \sum_{(i,j,k) \in \Delta_m} B_{i,j,k}^m(1 - u - v, u, v) b_{i,j,k}^{(l)} \right) \vec{e}_l. \end{aligned}$$

Οπότε, έχουμε:

$$F(u, v) = a_0 + \sum_{l=1}^n F_l(u, v) \vec{e}_l,$$

όπου

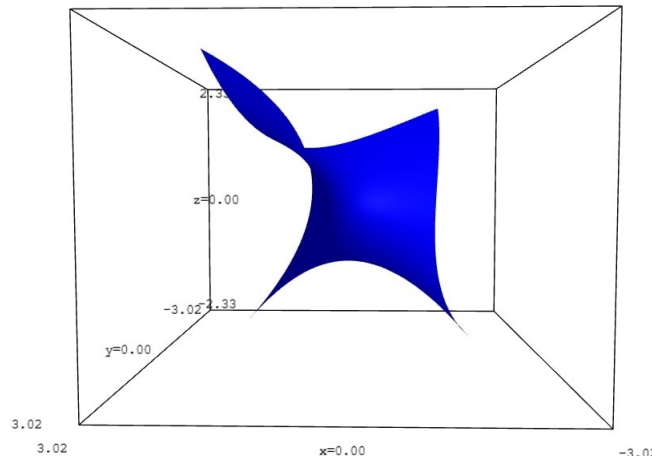
$$F_l(x, y) = \sum_{(i,j,k) \in \Delta_m} B_{i,j,k}^m(1 - x - y, x, y) b_{i,j,k}^{(l)}.$$

Καθώς ισχύει  $\deg B_{i,j,k}^m = m$ , έχουμε  $\deg F_l \leq m$ . □

**Πόρισμα 10.1.** Οι πολυωνυμικές επιφάνειες ολικού βαθμού  $m$  σε πολική μορφή στο  $\mathbb{A}^n$  ( $n \geq 3$ ) δίνονται από τις απεικονίσεις

$$F : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{A}^n, (u, v) \longmapsto (p_1(u, v), \dots, p_n(u, v)),$$

όπου  $p_i(u, v) \in \mathbb{R}[u, v]$  με  $\deg p_i \leq m$  ( $i = 1, \dots, n$ ).



Σχήμα 10.2: Η επιφάνεια του Enneper.

**Παράδειγμα 10.3.** Η πολυωνυμική επιφάνεια

$$F : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{A}^3, (u, v) \longmapsto \left(u + uv^2 - \frac{v^3}{3}, v + vu^2 - \frac{u^3}{3}, u^2 - v^2\right)$$

είναι γνωστή ως επιφάνεια του Enneper. Θεωρούμε τα ομογενή πολυώνυμα

$$f_1((u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3)) = \frac{u_1 + u_2 + u_3}{3} - \frac{u_1 u_2 u_3}{3} + \frac{u_1 v_2 v_3 + u_2 v_1 v_3 + u_3 v_1 v_2}{3},$$

$$f_2((u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3)) = \frac{v_1 + v_2 + v_3}{3} - \frac{v_1 v_2 v_3}{3} + \frac{v_1 u_2 u_3 + v_2 u_1 u_3 + v_3 u_1 u_2}{3},$$

και

$$f_3((u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3)) = \frac{u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3}{3} - \frac{v_1 v_2 + v_1 v_3 + v_2 v_3}{3}.$$

Η πολική μορφή της  $F$  είναι η συμμετρική 3-ομοπαράλληλική απεικόνιση  $f : \mathcal{P}^3 \rightarrow \mathbb{A}^3$  με

$$f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)), \text{ για κάθε } (x, y, z) \in \mathcal{P}^3.$$

Θεωρούμε το τρίγωνο αναφοράς  $\Delta rst$ , όπου  $r = (1, 0)$ ,  $s = (0, 1)$  και  $t = (0, 0)$ . Τα σημεία ελέγχου της επιφάνειας του Enneper ως προς το  $\Delta rst$  είναι τα εξής:

$$f(r, r, r) = \left(\frac{2}{3}, 0, 1\right), \quad f(r, r, s) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad f(r, r, t) = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right),$$

$$f(r, t, t) = \left(\frac{1}{3}, 0, 0\right), \quad f(r, s, t) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right), \quad f(r, s, s) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right),$$

$$f(t, t, t) = (0, 0, 0), \quad f(s, t, t) = \left(0, \frac{1}{3}, 0\right), \quad f(s, s, t) = \left(0, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right),$$

$$f(s, s, s) = \left(-\frac{1}{3}, 1, -1\right).$$

## 10.2 Αλγόριθμος του de Casteljaou για Επιφάνειες Ολικού Βαθμού

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε τον αλγόριθμο του de Casteljaou για την περίπτωση των επιφανειών ολικού βαθμού. Ας είναι  $\Delta rst$  ένα τρίγωνο αναφοράς του  $\mathcal{P}$  και  $(b_{i,j,k})_{(i,j,k) \in \Delta_m}$  ένα τριγωνικό δίκτυο ελέγχου του  $\mathcal{E}$ . Τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 10.1, υπάρχει μία μοναδική συμμετρική  $m$ -ομοπαράλληλική απεικόνιση  $f : \mathcal{P}^m \rightarrow \mathcal{E}$  τέτοια, ώστε

$$f(\underbrace{r, \dots, r}_i, \underbrace{s, \dots, s}_j, \underbrace{t, \dots, t}_k) = b_{i,j,k}.$$

Ας είναι  $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}$  η πολυωνυμική επιφάνεια ολικού βαθμού  $m$  σε πολική μορφή της οποίας η αντίστοιχη  $m$ -πολική μορφή είναι η  $f$ .

Ο αλγόριθμος του de Casteljaou, όπως και στην περίπτωση των καμπυλών, χρησιμοποιεί ένα τρίγωνο αναφοράς του  $\mathcal{P}$  και ένα τριγωνικό δίκτυο ελέγχου του  $\mathcal{E}$  για να υπολογίσει το σημείο  $F(a)$  της επιφάνειας, για κάθε  $a \in \mathcal{P}$ .

Για την καλύτερη κατανόηση της λειτουργίας του αλγορίθμου, θα τον περιγράψουμε πρώτα για την περίπτωση  $m = 2$ .

10.2.1 Η Περίπτωση  $m = 2$ 

Ας είναι  $a \in \mathcal{P}$  με  $a = \lambda r + \mu s + \nu t$ , όπου  $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$  και  $\lambda + \mu + \nu = 1$ . Θα υπολογίσουμε το σημείο  $F(a)$ . Τα σημεία ελέγχου  $f(r, r) = b_{2,0,0}$ ,  $f(r, s) = b_{1,1,0}$ ,  $f(s, s) = b_{0,2,0}$ ,  $f(r, t) = b_{1,0,1}$ ,  $f(s, t) = b_{0,1,1}$ ,  $f(t, t) = b_{0,0,2}$ , είναι γνωστά και επομένως μπορούμε να υπολογίσουμε:

$$f(a, r) = f(\lambda r + \mu s + \nu t, r) = \lambda f(r, r) + \mu f(s, r) + \nu f(t, r),$$

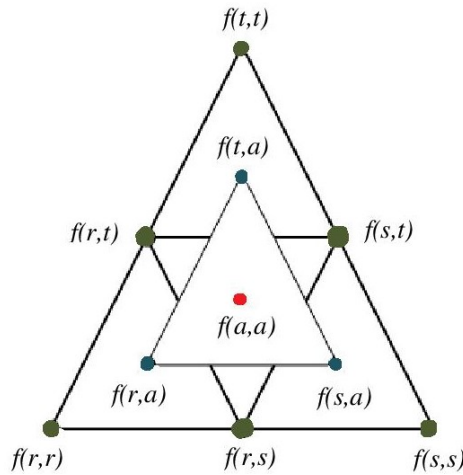
$$f(a, s) = f(\lambda r + \mu s + \nu t, s) = \lambda f(r, s) + \mu f(s, s) + \nu f(t, s),$$

$$f(a, t) = f(\lambda r + \mu s + \nu t, t) = \lambda f(r, t) + \mu f(s, t) + \nu f(t, t).$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε:

$$f(a, a) = f(a, \lambda r + \mu s + \nu t) = \lambda f(a, r) + \mu f(a, s) + \nu f(a, t).$$

Έτσι, προκύπτει το σημείο  $F(a) = f(a, a)$ .



Σχήμα 10.3: Ο αλγόριθμος του de Casteljau για  $m = 2$ .

**Παράδειγμα 10.4.** Ας είναι  $r = (1, 1)$ ,  $s = (1, 2)$ ,  $t = (2, 1)$ . Εύκολα επαληθεύουμε ότι η τριάδα  $(r, s, t)$  είναι ένα τρίγωνο αναφοράς του  $\mathcal{P}$ . Θεωρούμε το τριγωνικό δίκτυο ελέγχου βαθμού 2 του  $\mathbb{A}^3$  το οποίο αποτελείται από τα εξής σημεία:

$$b_{2,0,0} = (1, 1, 0), \quad b_{1,1,0} = (1, 3/2, -1), \quad b_{0,2,0} = (1, 2, -3),$$

$$b_{1,0,1} = (3/2, 1, 1), \quad b_{0,1,1} = (3/2, 3/2, 0), \quad b_{0,0,2} = (2, 1, 3).$$

Ας είναι  $f : \mathcal{P}^2 \rightarrow \mathbb{A}^3$  η μοναδική συμμετρική 2-ομοπαράλληλη απεικόνιση τέτοια, ώστε

$$f(r, r) = (1, 1, 0), \quad f(r, s) = (1, 3/2, -1), \quad f(r, t) = (3/2, 1, 1),$$

$$f(s, s) = (1, 2, -3), \quad f(s, t) = (3/2, 3/2, 0), \quad f(t, t) = (2, 1, 3),$$

και  $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}$  η πολωνυμική επιφάνεια πολικού βαθμού 2 της οποίας η αντίστοιχη 2-πολική μορφή είναι η  $f$ . Θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο του de Casteljau για να υπολογίσουμε την τιμή  $F(a)$  στο σημείο  $a = (3, 2)$ .

Γράφουμε το  $a$  ως ομοπαράλληλο συνδυασμό των  $r, s$  και  $t$ :

$$a = (3, 2) = -2(1, 1) + (1, 2) + 2(2, 1) = -2r + s + 2t.$$

Υπολογίζουμε:

$$f(a, r) = -2f(r, r) + f(s, r) + 2f(t, r) = (2, 3/2, 1),$$

$$f(a, s) = -2f(r, s) + f(s, s) + 2f(t, s) = (2, 2, -1),$$

$$f(a, t) = -2f(r, t) + f(s, t) + 2f(t, t) = (5/2, 3/2, 4).$$

Τέλος, υπολογίζουμε:

$$F(a) = -2f(a, r) + f(a, s) + 2f(a, t) = (3, 2, 5).$$

### 10.2.2 Η Γενική Περίπτωση

Στη συνέχεια δίνουμε τον αλγόριθμο του de Casteljau στη γενική περίπτωση.

**Αλγόριθμος 10.1.** Αλγόριθμος του de Casteljau.

*Είσοδος:* Ένα τρίγωνο αναφοράς  $\Delta rst$  του  $\mathcal{P}$ , ένα τριγωνικό δίκτυο ελέγχου βαθμού  $m$ ,  $(b_{i,j,k})_{(i,j,k) \in \Delta_m}$ , και ένα σημείο  $a = \lambda r + \mu s + \nu t$  του  $\mathcal{P}$ .

*Έξοδος:* Το σημείο  $F(a)$ .

1. Θέτουμε  $b_{i,j,k}^0 = b_{i,j,k}$ ,  $(i, j, k) \in \Delta_m$ .
2. Για κάθε  $l = 1, \dots, m$ , παίρνουμε  $i = 0, \dots, m-l, j = 0, \dots, m-l-i$  και  $k = m-l-i-j$ .
3. Υπολογίζουμε:  $b_{i,j,k}^l = \lambda b_{i+1,j,k}^{l-1} + \mu b_{i,j,k+1}^{l-1} + \nu b_{i,j,k+1}^{l-1}$ .
4. Εξάγουμε το σημείο  $b_{0,0,0}^m$ .

*Απόδειξη της ορθότητας του αλγορίθμου.* Θα δείξουμε ότι για κάθε  $l \in \{0, \dots, m\}$  και  $i, j, k$  με  $i + j + k = m - l$  ισχύει

$$b_{i,j,k}^l = f(\underbrace{a, \dots, a}_l, \underbrace{r, \dots, r}_i, \underbrace{s, \dots, s}_j, \underbrace{t, \dots, t}_k).$$

Για  $l = 1$  έχουμε  $i, j, k$  με  $i + j + k = m - 1$  και επομένως ισχύει:

$$b_{i,j,k}^1 = \lambda b_{i+1,j,k}^0 + \mu b_{i,j,k+1}^0 + \nu b_{i,j,k+1}^0 = \lambda f(\underbrace{r, \dots, r}_{i+1}, \underbrace{s, \dots, s}_j, \underbrace{t, \dots, t}_k) +$$

$$\mu f(\underbrace{r, \dots, r}_i, \underbrace{s, \dots, s}_{j+1}, \underbrace{t, \dots, t}_k) + \nu f(\underbrace{r, \dots, r}_i, \underbrace{s, \dots, s}_j, \underbrace{t, \dots, t}_{k+1}) =$$

$$f(\underbrace{a, r, \dots, r}_i, \underbrace{s, \dots, s}_j, \underbrace{t, \dots, t}_k).$$

Υποθέτουμε ότι για  $l = n$  και κάθε  $i, j, k$  με  $i + j + k = m - n$  ισχύει:

$$b_{i,j,k}^n = f(\underbrace{a, \dots, a}_n, \underbrace{r, \dots, r}_i, \underbrace{s, \dots, s}_j, \underbrace{t, \dots, t}_k).$$



Ας είναι  $l = n + 1$  και  $i, j, k$  με  $i + j + k = m - n - 1$ . Τότε, χρησιμοποιώντας την υπόθεση της επαγωγής, έχουμε:

$$\begin{aligned}
 b_{i,j,k}^{n+1} &= \lambda b_{i+1,j,k}^n + \mu b_{i,j+1,k}^n + \nu b_{i,j,k+1}^n \\
 &= \lambda f(\underbrace{a, \dots, a}_{i+1}, \underbrace{r, \dots, r}_j, \underbrace{s, t, \dots, t}_k) \\
 &\quad + \mu f(\underbrace{a, \dots, a}_i, \underbrace{r, \dots, r}_{j+1}, \underbrace{s, t, \dots, t}_k) \\
 &\quad + \nu f(\underbrace{a, \dots, a}_i, \underbrace{r, \dots, r}_j, \underbrace{s, t, \dots, t}_{k+1}) \\
 &= f(\underbrace{a, \dots, a}_{n+1}, \underbrace{r, \dots, r}_i, \underbrace{s, \dots, s}_j, \underbrace{t, \dots, t}_k).
 \end{aligned}$$

Επομένως, η προς απόδειξη ισότητα ισχύει. Παίρνοντας  $l = m$  έχουμε:

$$b_{0,0,0}^m = f(a, \dots, a).$$

**Παράδειγμα 10.5.** Θεωρούμε το τρίγωνο αναφοράς  $\Delta rst$  του  $\mathcal{P}$ , με  $r = (0, 0)$ ,  $s = (1, 0)$ ,  $t = (0, 1)$  και το τριγωνικό δίκτυο ελέγχου βαθμού 3 του  $\mathbb{A}^3$  το οποίο αποτελείται από τα εξής σημεία:

$$b_{3,0,0} = (1, 1, 0), \quad b_{0,3,0} = (-1, 0, 2), \quad b_{0,0,3} = (1, 0, 3), \quad b_{2,1,0} = (1, -1, 0),$$

$$b_{2,0,1} = (2, 1, 2), \quad b_{0,2,1} = (0, 1, 3), \quad b_{1,2,0} = (1, -1, -1),$$

$$b_{1,0,2} = (1, 0, 0), \quad b_{0,1,2} = (-2, 2, 1), \quad b_{1,1,1} = (3, 2, 1).$$

Ας είναι  $f : \mathcal{P}^3 \rightarrow \mathbb{A}^3$  η μοναδική συμμετρική 3-ομοπαράλληλη απεικόνιση τέτοια, ώστε

$$f(r, r, r) = (1, 1, 0), \quad f(s, s, s) = (-1, 0, 2), \quad f(t, t, t) = (1, 0, 3),$$

$$f(r, r, s) = (1, -1, 0), \quad f(r, r, t) = (2, 1, 2), \quad f(s, s, t) = (0, 1, 3),$$

$$f(r, s, s) = (1, -1, -1), \quad f(r, t, t) = (1, 0, 0), \quad f(s, t, t) = (-2, 2, 1),$$

$$f(r, s, t) = (3, 2, 1)$$

και  $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{A}^3$  η πολωνυμική επιφάνεια πολικού βαθμού 3 της οποίας η αντίστοιχη 3-πολική μορφή είναι η  $f$ . Θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο του de Casteljau για να υπολογίσουμε την τιμή  $F(a)$  στο σημείο  $a = (1, 2)$ .

Έχουμε

$$a = -2r + s + 2t$$

και επομένως οι ομοπαράλληλες συντεταγμένες του  $a$  ως προς το πλαίσιο  $(r, s, t)$  είναι  $\lambda = -2$ ,  $\mu = 1$  και  $\nu = 2$ . Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο του de Casteljau.

Για  $l = 1$ , παίρνουμε:

1.  $i = 0, j = 0, k = 2$ . Υπολογίζουμε:

$$b_{0,0,2}^1 = \lambda b_{1,0,2} + \mu b_{0,1,2} + \nu b_{0,0,3} = (-2, 2, 7).$$

2.  $i = 0, j = 1, k = 1$ . Υπολογίζουμε:

$$b_{0,1,1}^1 = \lambda b_{1,1,1} + \mu b_{0,2,1} + \nu b_{0,1,2} = (-10, 1, 3).$$

3.  $i = 0, j = 2, k = 0$ . Υπολογίζουμε:

$$b_{0,2,0}^1 = \lambda b_{1,2,0} + \mu b_{0,3,0} + \nu b_{0,2,1} = (-3, 4, 10).$$

4.  $i = 1, j = 0, k = 1$ . Υπολογίζουμε:

$$b_{1,0,1}^1 = \lambda b_{2,0,1} + \mu b_{1,1,1} + \nu b_{1,0,2} = (-2, 0, -3).$$

5.  $i = 1, j = 1, k = 0$ . Υπολογίζουμε:

$$b_{1,1,0}^1 = \lambda b_{2,1,0} + \mu b_{1,2,0} + \nu b_{1,1,1} = (5, 5, 1).$$

6.  $i = 2, j = 0, k = 0$ . Υπολογίζουμε:

$$b_{2,0,0}^1 = \lambda b_{3,0,0} + \mu b_{2,1,0} + \nu b_{2,0,1} = (3, -1, 4).$$

Για  $l = 2$ , παίρνουμε:

1.  $i = 0, j = 0, k = 1$ . Υπολογίζουμε:

$$b_{0,0,1}^2 = \lambda b_{1,0,1}^1 + \mu b_{0,1,1}^1 + \nu b_{0,0,2}^1 = (-10, 5, 23).$$

2.  $i = 0, j = 1, k = 0$ . Υπολογίζουμε:

$$b_{0,1,0}^2 = \lambda b_{1,1,0}^1 + \mu b_{0,2,0}^1 + \nu b_{0,1,1}^1 = (-33, -4, 14).$$

3.  $i = 1, j = 0, k = 0$ . Υπολογίζουμε:

$$b_{1,0,0}^2 = \lambda b_{2,0,0}^1 + \mu b_{1,1,0}^1 + \nu b_{1,0,1}^1 = (-5, 7, -13).$$

Τέλος, υπολογίζουμε:

$$b_{0,0,0}^3 = \lambda b_{1,0,0}^2 + \mu b_{0,1,0}^2 + \nu b_{0,0,1}^2 = (-33, -13, 63).$$

Αν  $a_1, \dots, a_m \in \mathcal{P}$ , τότε μπορούμε με ανάλογο τρόπο να υπολογίσουμε την τιμή  $f(a_1, \dots, a_m)$ . Δίνουμε παρακάτω τον αλγόριθμο για τον υπολογισμό του  $f(a_1, \dots, a_m)$  ο οποίος είναι μία γενίκευση του αλγορίθμου του de Casteljau.

**Αλγόριθμος 10.2.** Υπολογισμός των τιμών της  $f$ .

*Είσοδος:* Ένα τρίγωνο αναφοράς  $\Delta rst$  του  $\mathcal{P}$ , ένα τριγωνικό δίκτυο ελέγχου  $(b_{i,j,k})_{(i,j,k) \in \Delta_m}$  και  $m$  σημεία  $a_i = \lambda_i r + \mu_i s + \nu_i t$  ( $i = 1, \dots, m$ ) του  $\mathcal{P}$ .

*Έξοδος:* Η τιμή  $f(a_1, \dots, a_m)$ .

1. Θέτουμε  $b_{i,j,k}^0 = b_{i,j,k}$ ,  $(i, j, k) \in \Delta_m$ .
2. Για κάθε  $l = 1, \dots, m$ , παίρνουμε  $i = 0, \dots, m-l, j = 0, \dots, m-l-i$  και  $k = m-l-i-j$ .
3. Υπολογίζουμε  $b_{i,j,k}^l = \lambda_l b_{i+1,j,k}^{l-1} + \mu_l b_{i,j+1,k}^{l-1} + \nu_l b_{i,j,k+1}^{l-1}$ .
4. Εξάγουμε το σημείο  $b_{0,0,0}^m$ .

Η απόδειξη της ορθότητας του αλγορίθμου είναι όμοια με αυτή του αλγορίθμου του de Casteljau και γι' αυτό παραλείπεται. Στο επόμενο παράδειγμα δίνουμε τον υπολογισμό μίας πολικής τιμής με τον παραπάνω αλγόριθμο.

**Παράδειγμα 10.6.** Θεωρούμε το ομοπαράλληλο πλαίσιο του  $\mathcal{P}$ ,  $r = (1, 0)$ ,  $s = (1, 1)$ ,  $t = (0, 1)$  και το τριγωνικό δίκτυο ελέγχου βαθμού 2 του  $\mathbb{A}^3$  το οποίο αποτελείται από τα εξής σημεία:

$$b_{2,0,0} = (1, 0, 0), \quad b_{1,1,0} = (-1, 1, 1), \quad b_{1,0,1} = (1, 2, -1),$$

$$b_{0,2,0} = (0, -1, 1), \quad b_{0,1,1} = (1, 1, -2), \quad b_{0,0,2} = (1, -2, 0).$$

Ας είναι  $f : \mathcal{P}^2 \rightarrow \mathbb{A}^3$  η μοναδική συμμετρική 2-ομοπαράλληλη απεικόνιση τέτοια, ώστε

$$f(r, r) = (1, 0, 0), \quad f(r, s) = (-1, 1, 1), \quad f(r, t) = (1, 2, -1),$$

$$f(s, s) = (0, -1, 1), \quad f(s, t) = (1, 1, -2), \quad f(t, t) = (1, -2, 0).$$

Θα υπολογίσουμε την τιμή  $f(a_1, a_2)$  στα σημεία  $a_1 = (3, 0)$  και  $a_2 = (-1, -1)$ .

Έχουμε:

$$a_1 = r + 2s + (-2)t \quad \text{και} \quad a_2 = 2r - 3s + 2t.$$

Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο 10.2.

Για  $l = 1$ , παίρνουμε:

1.  $i = 0, j = 0, k = 1$ . Υπολογίζουμε:

$$b_{0,0,1}^1 = b_{1,0,1} + 2b_{0,1,1} + (-2)b_{0,0,2} = (1, 8, -5).$$

2.  $i = 0, j = 1, k = 0$ . Υπολογίζουμε:

$$b_{0,1,0}^1 = b_{1,1,0} + 2b_{0,2,0} + (-2)b_{0,1,1} = (-3, -3, 7).$$

3.  $i = 1, j = 0, k = 0$ . Υπολογίζουμε:

$$b_{1,0,0}^1 = b_{2,0,0} + 2b_{1,1,0} + (-2)b_{1,0,1} = (-3, -2, 4).$$

Για  $l = 2$ , παίρνουμε:

$$b_{0,0,0}^2 = 2b_{1,0,0}^1 - 3b_{0,1,0}^1 + 2b_{0,0,1}^1 = (5, 11, -23).$$

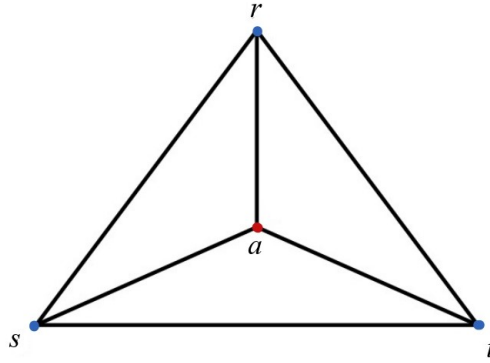
### 10.3 Αλγόριθμος Υποδιαίρεσης για Επιφάνειες Ολικού Βαθμού

Ας είναι  $\mathcal{E}$  ένας ομοπαράλληλος χώρος διάστασης  $\geq 3$ ,  $\Delta rst$  ένα τρίγωνο αναφοράς του  $\mathcal{P}$  και  $\mathcal{N} = (b_{i,j,k})_{(i,j,k) \in \Delta_m}$  ένα τριγωνικό δίκτυο ελέγχου βαθμού  $m$ . Θεωρούμε την πολυωνυμική επιφάνεια  $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}$  ολικού βαθμού  $m$  σε πολική μορφή η οποία ορίζεται από το  $\Delta rst$  και το  $\mathcal{N}$ .

**Ορισμός 10.5.** Το σύνολο

$$\mathcal{T}_{r,s,t}(F) = \{F(\lambda r + \mu s + \nu t) \mid \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}, \lambda + \mu + \nu = 1, \lambda \geq 0, \mu \geq 0, \nu \geq 0\}$$

καλείται *τριγωνικό τεμάχιο* της επιφάνειας  $F$  ως προς το  $\Delta rst$ . Τα σημεία  $b_{m,0,0}$ ,  $b_{0,m,0}$ ,  $b_{0,0,m}$  ανήκουν στο  $\mathcal{T}_{r,s,t}(F)$  και καλούνται *γωνίες* του  $\mathcal{T}_{r,s,t}(F)$ .



Σχήμα 10.4: Υποδιαίρεση του τριγώνου αναφοράς σε τρία τρίγωνα.

Παρατηρούμε ότι  $F(a) \in \mathcal{T}_{r,s,t}(F)$  αν και μόνον αν το  $a$  ανήκει στο κυρτό κάλυμμα των  $r, s$  και  $t$ .

Σ' αυτή την ενότητα θα δούμε πώς μπορούμε να διαμερίσουμε το τρίγωνο αναφοράς  $\Delta rst$  σε μικρότερα τρίγωνα με αποτέλεσμα τη διαμέριση του τριγωνικού τεμαχίου  $\mathcal{T}_{r,s,t}(F)$  της επιφάνειας  $F$  σε άλλα μικρότερα.

Ας υποθέσουμε ότι το  $a$  ανήκει στο κυρτό κάλυμμα των  $r, s, t$  και είναι διαφορετικό από αυτά. Καθώς είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, ο αλγόριθμος του de Casteljau υπολογίζει το σημείο  $F(a)$ . Κατά τη διάρκεια της λειτουργίας του, ο αλγόριθμος υπολογίζει για κάθε  $l = 1, \dots, m$ , τα σημεία

$$b_{i,j,k}^l = f(\underbrace{a, \dots, a}_l, \underbrace{r, \dots, r}_i, \underbrace{s, \dots, s}_j, \underbrace{t, \dots, t}_k),$$

όπου  $(i, j, k) \in \Delta_{m-1}$ . Έτσι, ο αλγόριθμος υπολογίζει εκτός το σημείο  $F(a)$  και τα εξής τρία τριγωνικά δίκτυα ελέγχου βαθμού  $m$ :  $Nast = (b_{0,j,k}^l)_{(l,j,k) \in \Delta_m}$ ,  $Nrat = (b_{i,0,k}^l)_{(i,l,k) \in \Delta_m}$  και  $Nrsa = (b_{i,j,0}^l)_{(i,j,l) \in \Delta_m}$ . Ο αλγόριθμος του de Casteljau τροποποιείται εύκολα, ώστε να δίνει εκτός από το σημείο  $F(a)$  και τα τριγωνικά δίκτυα,  $Nast$ ,  $Nrat$  και  $Nrsa$ . Αυτή η εκδοχή του αλγορίθμου του de Casteljau καλείται *αλγόριθμος υποδιαίρεσης*.

**Παράδειγμα 10.7.** Θεωρούμε το τρίγωνο αναφοράς  $\Delta rst$  του  $\mathcal{P}$ , με  $r = (0, 0)$ ,  $s = (1, 0)$ ,  $t = (0, 1)$  και το τριγωνικό δίκτυο ελέγχου βαθμού 3 του Παραδείγματος 10.5. Ο υπολογισμός του σημείου  $F(a)$  για  $a = (1, 2)$  δίνει τα εξής τριγωνικά δίκτυα:

α) Το  $Nast$ , το οποίο αποτελείται από τα σημεία:

$$b_{0,3,0} = (-1, 0, 2), \quad b_{0,0,3} = (1, 0, 3), \quad b_{0,2,1} = (0, 1, 3), \quad b_{0,1,2} = (-2, 2, 1),$$

$$b_{0,0,2}^1 = (-2, 2, 7), \quad b_{0,1,1}^1 = (-10, 1, 3), \quad b_{0,2,0}^1 = (-3, 4, 10),$$

$$b_{0,0,1}^2 = (-10, 5, 23), \quad b_{0,1,0}^2 = (-33, -4, 14), \quad b_{0,0,0}^3 = (-33, -13, 63).$$

β) Το  $Nrat$ , το οποίο αποτελείται από τα σημεία:

$$b_{3,0,0} = (1, 1, 0), \quad b_{0,0,3} = (1, 0, 3), \quad b_{2,0,1} = (2, 1, 2), \quad b_{1,0,2} = (1, 0, 0),$$

$$b_{0,0,2}^1 = (-2, 2, 7), \quad b_{1,0,1}^1 = (-2, 0, -3), \quad b_{2,0,0}^1 = (3, -1, 4),$$

$$b_{0,0,1}^2 = (-10, 5, 23), \quad b_{1,0,0}^2 = (-5, 7, -13), \quad b_{0,0,0}^3 = (-33, -13, 63).$$

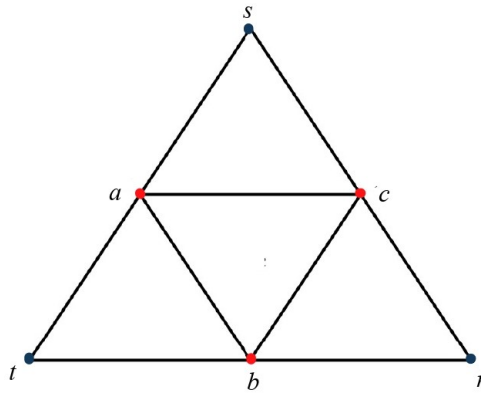
γ) Το  $Nrsa$ , το οποίο αποτελείται από τα σημεία:

$$b_{3,0,0} = (1, 1, 0), \quad b_{0,3,0} = (-1, 0, 2), \quad b_{2,1,0} = (1, -1, 0), \quad b_{1,2,0} = (1, -1, -1),$$

$$b_{0,2,0}^1 = (-3, 4, 10), \quad b_{1,1,0}^1 = (5, 5, 1), \quad b_{2,0,0}^1 = (3, -1, 4),$$

$$b_{0,1,0}^2 = (-33, -4, 14), \quad b_{1,0,0}^2 = (-5, 7, -13), \quad b_{0,0,0}^3 = (-33, -13, 63).$$

Αν το  $a$  δεν ανήκει σε κανένα από τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία ορίζονται από τα ζεύγη σημείων  $\{r, s\}$ ,  $\{r, t\}$  και  $\{s, t\}$ , τότε παίρνουμε μία διαμέριση του τριγώνου αναφοράς  $\Delta rst$  στα τρίγωνα αναφοράς  $\Delta ast$ ,  $\Delta rat$  και  $\Delta rsa$ . Έτσι, η διαδικασία αυτή είναι δυνατόν να επαναληφθεί αρκετές φορές ώστε να διαμερίσει το αρχικό τριγωνικό τεμάχιο  $\mathcal{T}_{r,s,t}(F)$  σε μικρότερα τριγωνικά τεμάχια. Η διαμέριση όμως του  $\mathcal{T}_{r,s,t}(F)$  η οποία προκύπτει με αυτή τη μέθοδο δεν είναι ικανοποιητική, καθώς οι πλευρές του  $\Delta rst$  δεν υποδιαιρούνται. Υπάρχουν αρκετοί μέθοδοι διαμέρισης του  $\Delta rst$  οι οποίες υποδιαιρούν και τις πλευρές του, παρέχοντας έτσι μία καλύτερη διαμέριση του  $\mathcal{T}_{r,s,t}(F)$ . Θα περιγράψουμε παρακάτω μία τέτοια μέθοδο η οποία χρησιμοποιεί τέσσερις φορές τον αλγόριθμο του de Casteljau και οφείλεται στον J. Gallier.



Σχήμα 10.5: Υποδιαίρεση του τριγώνου αναφοράς σε τέσσερα τρίγωνα.

Τα βήματα της μεθόδου είναι τα εξής:

α) Θεωρούμε τα σημεία

$$a = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}t, \quad b = \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}t, \quad \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}s$$

τα οποία είναι τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων τα οποία ορίζονται από τα ζεύγη σημείων  $\{s, t\}$ ,  $\{r, t\}$  και  $\{r, s\}$ .

β) Υπολογίζουμε το σημείο  $F(a)$ , χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο υποδιαίρεσης και το τρίγωνο αναφοράς  $\Delta rst$ . Έτσι, διαιρούμε το τρίγωνο  $\Delta rst$  στα τρίγωνα  $\Delta rat$  και  $\Delta rsa$ , και παίρνουμε τα τριγωνικά δίκτυα ελέγχου  $Nrat$  και  $Nrsa$  (το τρίτο δίκτυο  $Nast$  αντιστοιχεί στην τριάδα  $(a, s, t)$  η οποία δεν αποτελεί ομοπαράλληλο πλαίσιο και επομένως το παραβλέπουμε).

γ) Υπολογίζουμε το σημείο  $F(b)$ , χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο υποδιαίρεσης και το τρίγωνο αναφοράς  $\Delta rat$ . Έτσι, διαιρούμε το τρίγωνο  $\Delta rat$  στα τρίγωνα  $\Delta bat$  και  $\Delta rab$ , και παίρνουμε τα τριγωνικά δίκτυα ελέγχου  $Nbat$  και  $Nrab$  (παραβλέποντας το δίκτυο  $Nrbt$  που αντιστοιχεί στην τριάδα  $(r, b, t)$  η οποία δεν αποτελεί ομοπαράλληλο πλαίσιο).

δ) Υπολογίζουμε το σημείο  $F(c)$ , χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο υποδιαίρεσης και το τρίγωνο αναφοράς  $\Delta rsa$ . Οπότε, το τρίγωνο  $\Delta rsa$  διαιρείται στα τρίγωνα  $\Delta csa$  και  $\Delta rca$ , απ' όπου παίρνουμε τα τριγωνικά δίκτυα  $Ncsa$  και  $Nrca$  (παραβλέποντας το δίκτυο  $N_{rsc}$  που αντιστοιχεί στην τριάδα  $(r, s, c)$  η οποία δεν αποτελεί ομοπαράλληλο πλαίσιο).

ε) Υπολογίζουμε πάλι το  $F(c)$  χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο υποδιαίρεσης και το τρίγωνο αναφοράς  $\Delta rab$ . Με αυτό τον τρόπο προκύπτουν τα τρίγωνα  $\Delta cab$  και  $\Delta rcb$  και κατά συνέπεια τα δίκτυα ελέγχου  $Ncab$  και  $Nrcb$ .

Επομένως, χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του de Casteljau τέσσερις φορές διαιρούμε το τρίγωνο αναφοράς  $\Delta rst$  στα τρίγωνα  $\Delta bat$ ,  $\Delta csa$ ,  $\Delta cab$  και  $\Delta rcb$  με αντίστοιχα δίκτυα ελέγχου, τα  $Nbat$ ,  $Ncsa$ ,  $Ncab$  και  $Nrcb$ .

**Παράδειγμα 10.8.** Θεωρούμε το τρίγωνο αναφοράς  $\Delta rst$  του  $\mathcal{P}$ , με  $r = (0, 0)$ ,  $s = (1, 0)$ ,  $t = (0, 1)$  και το τριγωνικό δίκτυο ελέγχου βαθμού 3 του Παραδείγματος 10.5. Θα εφαρμόσουμε την παραπάνω μέθοδο για

να χωρίσουμε το τρίγωνο αναφοράς  $\Delta rst$  σε τέσσερα άλλα τρίγωνα και θα υπολογίσουμε τα αντίστοιχα δίκτυα ελέγχου.

Θεωρούμε τα σημεία

$$a = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}t = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad b = \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}t = \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad c = \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}s = \left(\frac{1}{2}, 0\right).$$

Θα υπολογίσουμε πρώτα τα δίκτυα  $Nrat$  και  $Nrsa$ , τα οποία αντιστοιχούν στα τρίγωνα  $\Delta rat$  και  $\Delta rsa$  χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του de Casteljau για τον υπολογισμό του  $F(a)$ .

Για  $l = 1$ , παίρνουμε:

1.  $i = 0, j = 0, k = 2$ . Υπολογίζουμε:

$$b_{0,0,2}^1 = \frac{1}{2}b_{0,1,2} + \frac{1}{2}b_{0,0,3} = \left(1, -\frac{1}{2}, 1\right).$$

2.  $i = 0, j = 1, k = 1$ . Υπολογίζουμε:

$$b_{0,1,1}^1 = \frac{1}{2}b_{0,2,1} + \frac{1}{2}b_{0,1,2} = \left(-1, \frac{3}{2}, 2\right).$$

3.  $i = 0, j = 2, k = 0$ . Υπολογίζουμε:

$$b_{0,2,0}^1 = \frac{1}{2}b_{0,3,0} + \frac{1}{2}b_{0,2,1} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

4.  $i = 1, j = 0, k = 1$ . Υπολογίζουμε:

$$b_{1,0,1}^1 = \frac{1}{2}b_{1,1,1} + \frac{1}{2}b_{1,0,2} = \left(2, 1, \frac{1}{2}\right).$$

5.  $i = 1, j = 1, k = 0$ . Υπολογίζουμε:

$$b_{1,1,0}^1 = \frac{1}{2}b_{1,2,0} + \frac{1}{2}b_{1,1,1} = \left(2, \frac{1}{2}, 0\right).$$

6.  $i = 2, j = 0, k = 0$ . Υπολογίζουμε:

$$b_{2,0,0}^1 = \frac{1}{2}b_{2,1,0} + \frac{1}{2}b_{2,0,1} = \left(\frac{3}{2}, 0, 1\right).$$

Για  $l = 2$ , παίρνουμε:

1.  $i = 0, j = 0, k = 1$ . Υπολογίζουμε:

$$b_{0,0,1}^2 = \frac{1}{2}b_{0,1,1}^1 + \frac{1}{2}b_{0,0,2}^1 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

2.  $i = 0, j = 1, k = 0$ . Υπολογίζουμε:

$$b_{0,1,0}^2 = \frac{1}{2}b_{0,2,0}^1 + \frac{1}{2}b_{0,1,1}^1 = \left(-\frac{3}{4}, 1, \frac{9}{4}\right).$$

3.  $i = 1, j = 0, k = 0$ . Υπολογίζουμε:

$$b_{1,0,0}^2 = \frac{1}{2}b_{1,1,0}^1 + \frac{1}{2}b_{1,0,1}^1 = \left(2, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

Τέλος, υπολογίζουμε:

$$F(a) = b_{0,0,0}^3 = \frac{1}{2}b_{0,1,0}^2 + \frac{1}{2}b_{0,0,1}^2 = \left(-\frac{3}{8}, 1, \frac{15}{8}\right).$$

Το δίκτυο  $Nrat$  αποτελείται από τα σημεία:

$$b_{3,0,0} = (1, 1, 0), b_{0,0,3} = (1, 0, 3), b_{2,0,1} = (2, 1, 2), b_{1,0,2} = (1, 0, 0),$$

$$b_{2,0,0}^1 = \left(\frac{3}{2}, 0, 1\right), b_{0,0,2}^1 = \left(1, -\frac{1}{2}, 1\right), b_{1,0,1}^1 = \left(2, 1, \frac{1}{2}\right),$$

$$b_{1,0,0}^2 = \left(2, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), b_{0,0,1}^2 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), b_{0,0,0}^3 = \left(-\frac{3}{8}, 1, \frac{15}{8}\right).$$

Επίσης, το δίκτυο  $Nrsa$  αποτελείται από τα σημεία:

$$b_{3,0,0} = (1, 1, 0), b_{0,3,0} = (-1, 0, 2), b_{2,1,0} = (1, -1, 0), b_{1,2,0} = (1, -1, -1),$$

$$b_{2,0,0}^1 = \left(\frac{3}{2}, 0, 1\right), b_{0,2,0}^1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right), b_{1,1,0}^1 = \left(2, \frac{1}{2}, 0\right),$$

$$b_{1,0,0}^2 = \left(2, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), b_{0,1,0}^2 = \left(-\frac{3}{4}, 1, \frac{9}{4}\right), b_{0,0,0}^3 = \left(-\frac{3}{8}, 1, \frac{15}{8}\right).$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε πάλι τον αλγόριθμο του de Casteljau και το τρίγωνο αναφοράς  $\Delta rat$  για τον υπολογισμό του  $F(b)$  και κατά συνέπεια των τριγωνικών δικτύων ελέγχου  $Nbat$  και  $Nrab$  τα οποία αντιστοιχούν στα τρίγωνα αναφοράς στα τρίγωνα  $\Delta bat$  και  $\Delta rab$ . Για τα σημεία του δικτύου  $Nrat$ , θέτουμε  $c_{i,0,k} = b_{i,0,k}$  με  $(i, k) \in \{(3, 0), (0, 3), (1, 2), (2, 1)\}$  και  $c_{i,j,k} = b_{i,0,k}^j$  με  $i + j + k = 3$  και  $i \geq 0, j \geq 1, k \geq 0$ . Υπολογίζουμε:

$$c_{0,0,2}^1 = \frac{1}{2}c_{1,0,2} + \frac{1}{2}c_{0,0,3} = \left(1, 0, \frac{3}{2}\right).$$

$$c_{0,1,1}^1 = \frac{1}{2}c_{1,1,1} + \frac{1}{2}c_{0,1,2} = \left(\frac{1}{2}, 2, 1\right).$$

$$c_{0,2,0}^1 = \frac{1}{2}c_{1,2,0} + \frac{1}{2}c_{0,2,1} = \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right).$$

$$c_{1,0,1}^1 = \frac{1}{2}c_{2,0,1} + \frac{1}{2}c_{1,0,2} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1\right).$$

$$c_{1,1,0}^1 = \frac{1}{2}c_{2,1,0} + \frac{1}{2}c_{1,1,1} = \left(2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

$$c_{2,0,0}^1 = \frac{1}{2}c_{3,0,0} + \frac{1}{2}c_{2,0,1} = \left(\frac{3}{2}, 1, 1\right).$$

$$c_{0,0,1}^2 = \frac{1}{2}c_{1,0,1}^1 + \frac{1}{2}c_{0,0,2}^1 = \left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right).$$

$$c_{0,1,0}^2 = \frac{1}{2}c_{1,1,0}^1 + \frac{1}{2}c_{0,1,1}^1 = \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right).$$

$$c_{1,0,0}^2 = \frac{1}{2}c_{2,0,0}^1 + \frac{1}{2}c_{1,0,1}^1 = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, 1\right).$$

$$F(b) = c_{0,0,0}^3 = \frac{1}{2}c_{1,0,0}^2 + \frac{1}{2}c_{0,0,1}^2 = \left(\frac{11}{8}, \frac{1}{2}, \frac{9}{8}\right).$$

Έτσι, το δίκτυο  $Nbat$  αποτελείται από τα σημεία:

$$c_{0,0,3} = (1, 0, 3), c_{0,3,0} = (-\frac{3}{8}, 1, \frac{15}{8}), c_{0,1,2} = (1, -\frac{1}{2}, 1), c_{0,2,1} = (0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}),$$

$$c_{0,0,2}^1 = (1, 0, \frac{3}{2}), c_{0,1,1}^1 = (\frac{1}{2}, 2, 1), c_{0,2,0}^1 = (\frac{1}{2}, 0, 1).$$

$$c_{0,0,1}^2 = (\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}), c_{0,1,0}^2 = (\frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{3}{4}), c_{0,0,0}^3 = (\frac{11}{8}, \frac{1}{2}, \frac{9}{8}).$$

Επίσης, το δίκτυο  $Nrab$  αποτελείται από τα σημεία:

$$c_{3,0,0} = (1, 1, 0), c_{0,3,0} = (-\frac{3}{8}, 1, \frac{15}{8}), c_{2,1,0} = (\frac{3}{2}, 0, 1), c_{1,2,0} = (2, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}),$$

$$c_{0,2,0}^1 = (\frac{1}{2}, 0, 1), c_{1,1,0}^1 = (2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), c_{2,0,0}^1 = (\frac{3}{2}, 1, 1),$$

$$c_{0,1,0}^2 = (\frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{3}{4}), c_{1,0,0}^2 = (\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, 1), c_{0,0,0}^3 = (\frac{11}{8}, \frac{1}{2}, \frac{9}{8}).$$

Τώρα, θα υπολογίσουμε το σημείο  $F(c)$  χρησιμοποιώντας το τρίγωνο αναφοράς  $\Delta rsa$  και το δίκτυο ελέγχου  $Nrsa$  το οποίο αντιστοιχεί σ' αυτό. Έτσι, το τρίγωνο  $\Delta rsa$  διαιρείται στα τρίγωνα  $\Delta csa$  και  $\Delta rca$ , απ' όπου προκύπτουν τα τριγωνικά δίκτυα  $Ncsc$  και  $Nrca$ . Για τα σημεία του δικτύου  $Nrsa$ , θέτουμε  $d_{i,j,0} = b_{i,j,0}$  με  $(i, j) \in \{(3, 0), (0, 3), (1, 2), (2, 1)\}$  και  $d_{i,j,k} = b_{i,j,k}^k$  με  $i + j + k = 3$  και  $i \geq 0, j \geq 0, k \geq 1$ . Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο του de Casteljau και παίρνουμε:

$$d_{0,0,2}^1 = \frac{1}{2}d_{1,0,2} + \frac{1}{2}d_{0,1,2} = (\frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{5}{4}).$$

$$d_{0,1,1}^1 = \frac{1}{2}d_{1,1,1} + \frac{1}{2}d_{0,2,1} = (\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}).$$

$$d_{0,2,0}^1 = \frac{1}{2}d_{1,2,0} + \frac{1}{2}d_{0,3,0} = (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

$$d_{1,0,1}^1 = \frac{1}{2}d_{2,0,1} + \frac{1}{2}d_{1,1,1} = (\frac{7}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}).$$

$$d_{1,1,0}^1 = \frac{1}{2}d_{2,1,0} + \frac{1}{2}d_{1,2,0} = (1, -1, -\frac{1}{2}).$$

$$d_{2,0,0}^1 = \frac{1}{2}d_{3,0,0} + \frac{1}{2}d_{2,1,0} = (1, 0, 0).$$

$$d_{0,0,1}^2 = \frac{1}{2}d_{1,0,1}^1 + \frac{1}{2}d_{0,1,1}^1 = (\frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}).$$

$$d_{0,1,0}^2 = \frac{1}{2}d_{1,1,0}^1 + \frac{1}{2}d_{0,2,0}^1 = (\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, 0).$$

$$d_{1,0,0}^2 = \frac{1}{2}d_{2,0,0}^1 + \frac{1}{2}d_{1,1,0}^1 = (1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}).$$

$$F(c) = d_{0,0,0}^3 = \frac{1}{2}d_{1,0,0}^2 + \frac{1}{2}d_{0,1,0}^2 = (\frac{3}{4}, -\frac{5}{8}, -\frac{1}{8}).$$

Το δίκτυο  $Ncas$  αποτελείται από τα σημεία:

$$d_{0,3,0} = (-1, 0, 2), d_{0,0,3} = (-\frac{3}{8}, 1, \frac{15}{8}),$$



$$\begin{aligned}
d_{0,1,2} &= \left(-\frac{3}{4}, 1, \frac{9}{4}\right), \quad d_{0,2,1} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right), \\
d_{0,2,0}^1 &= \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad d_{0,0,2}^1 = \left(\frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{5}{4}\right), \quad d_{0,1,1}^1 = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right), \\
d_{0,1,0}^2 &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, 0\right), \quad d_{0,0,1}^2 = \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}\right), \quad d_{0,0,0}^3 = \left(\frac{3}{4}, -\frac{5}{8}, -\frac{1}{8}\right).
\end{aligned}$$

Τέλος, θα υπολογίσουμε πάλι το σημείο  $F(c)$  χρησιμοποιώντας το τρίγωνο αναφοράς  $\Delta rab$  και το δίκτυο ελέγχου  $Nrab$ . Για τα σημεία του  $Nrab$  θέτουμε  $e_{i,j,0} = c_{i,j,0}$  ( $i, j \in \{(3,0), (0,3), (2,1), (1,2)\}$ ) και  $e_{i,j,k} = c_{i,j,0}^k$  με  $i \geq 0, j \geq 0, k \geq 1$  και  $i + j + k = 3$ . Έχουμε  $c = r + a - b$ . Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο του de Casteljau και παίρνουμε:

$$e_{0,0,2}^1 = e_{1,0,2} + e_{0,1,2} - e_{0,0,3} = \left(-\frac{9}{8}, \frac{3}{2}, \frac{5}{8}\right).$$

$$e_{0,1,1}^1 = e_{1,1,1} + e_{0,2,1} - e_{0,1,2} = \left(\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right).$$

$$e_{0,2,0}^1 = e_{1,2,0} + e_{0,3,0} - e_{0,2,1} = \left(\frac{9}{8}, \frac{7}{4}, \frac{9}{8}\right).$$

$$e_{1,0,1}^1 = e_{2,0,1} + e_{1,1,1} - e_{1,0,2} = \left(2, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right).$$

$$e_{1,1,0}^1 = e_{2,1,0} + e_{1,2,0} - e_{1,1,1} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right).$$

$$e_{2,0,0}^1 = e_{3,0,0} + e_{2,1,0} - e_{2,0,1} = (1, 0, 0).$$

$$e_{0,0,1}^2 = e_{1,0,1}^1 + e_{0,1,1}^1 - e_{0,0,2}^1 = \left(\frac{35}{8}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{8}\right).$$

$$e_{0,1,0}^2 = e_{1,1,0}^1 + e_{0,2,0}^1 - e_{0,1,1}^1 = \left(\frac{11}{8}, \frac{11}{4}, \frac{9}{8}\right).$$

$$e_{1,0,0}^2 = e_{2,0,0}^1 + e_{1,1,0}^1 - e_{1,0,1}^1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right).$$

$$F(c) = e_{0,0,0}^3 = e_{1,0,0}^2 + e_{0,1,0}^2 - e_{0,0,1}^2 = \left(-\frac{20}{8}, \frac{15}{4}, \frac{3}{4}\right).$$

Το δίκτυο  $Ncab$  αποτελείται από τα σημεία:

$$e_{0,3,0} = \left(-\frac{3}{8}, 1, \frac{15}{8}\right), \quad e_{0,0,3} = \left(\frac{11}{8}, \frac{1}{2}, \frac{9}{8}\right), \quad e_{0,1,2} = \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right), \quad e_{0,2,1} = \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right),$$

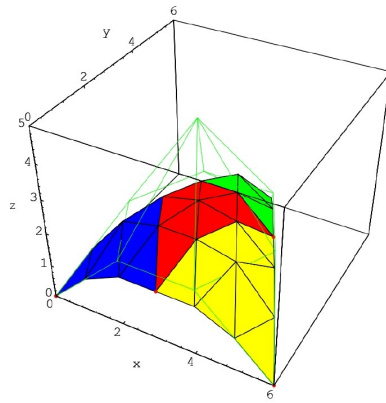
$$e_{0,2,0}^1 = \left(\frac{9}{8}, \frac{7}{4}, \frac{9}{8}\right), \quad e_{0,0,2}^1 = \left(-\frac{9}{8}, \frac{3}{2}, \frac{5}{8}\right), \quad e_{0,1,1}^1 = \left(\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right),$$

$$e_{0,1,0}^2 = \left(\frac{11}{8}, \frac{11}{4}, \frac{9}{8}\right), \quad e_{0,0,1}^2 = \left(\frac{35}{8}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{8}\right), \quad e_{0,0,0}^3 = \left(-\frac{20}{8}, \frac{15}{4}, \frac{3}{4}\right).$$

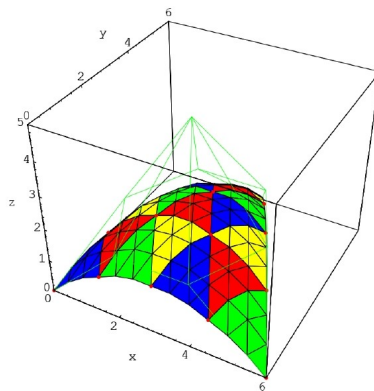
Τέλος, το δίκτυο  $Nrcb$  αποτελείται από τα σημεία:

$$e_{3,0,0} = (1, 1, 0), \quad e_{0,0,3} = \left(\frac{11}{8}, \frac{1}{2}, \frac{9}{8}\right), \quad e_{2,0,1} = \left(\frac{3}{2}, 1, 1\right), \quad e_{1,0,2} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, 1\right),$$

$$e_{2,0,0}^1 = (1, 0, 0), \quad e_{0,0,2}^1 = \left(-\frac{9}{8}, \frac{3}{2}, \frac{5}{8}\right), \quad e_{1,0,1}^1 = \left(2, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right),$$



Σχήμα 10.6: Εφαρμογή του αλγορίθμου υποδιαίρεσης πρώτη φορά.



Σχήμα 10.7: Εφαρμογή του αλγορίθμου υποδιαίρεσης δεύτερη φορά.

$$e_{1,0,0}^2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \quad e_{0,0,1}^2 = \left(\frac{35}{8}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{8}\right), \quad e_{0,0,0}^3 = \left(-\frac{20}{8}, \frac{15}{4}, \frac{3}{4}\right).$$

Έτσι, διαιρέσαμε το τρίγωνο  $\Delta rst$  στα τρίγωνα  $\Delta bat$ ,  $\Delta csa$ ,  $\Delta cab$ ,  $\Delta rcb$  και υπολογίσαμε τα αντίστοιχα δίκτυα ελέγχου,  $N_{bat}$ ,  $N_{csa}$ ,  $N_{cab}$  και  $N_{rcb}$ .

Στα σχήματα 10.4, 10.5 και 10.6 παρουσιάζουμε ένα παράδειγμα (το οποίο δανειστήκαμε από το [2]) στο οποίο φαίνεται το αποτέλεσμα της εφαρμογής του προηγούμενου αλγορίθμου σε μία πολυωνυμική επιφάνεια βαθμού τρία η οποία ορίζεται από το δίκτυο ελέγχου το οποίο αποτελείται από τα εξής σημεία:

$$(0, 0, 0), (2, 0, 2), (4, 0, 2), (6, 0, 0), (1, 2, 2),$$

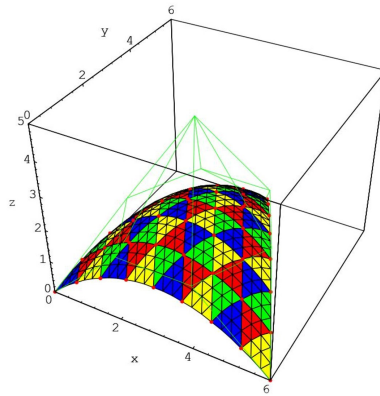
$$(3, 2, 5), (5, 2, 2), (2, 4, 2), (4, 4, 2), (3, 6, 0).$$

Ο αλγόριθμος εφαρμόστηκε τρεις φορές και, όπως φαίνεται, η τριγωνοποίηση η οποία πρέκυψε προσεγγίζει ικανοποιητικά το αντίστοιχο τεμάχιο της επιφάνειας.

### 10.4 Διπολυωνυμικές Επιφάνειες σε Πολική μορφή

Για να δώσουμε τον ορισμό της διπολυωνυμικής επιφάνειας θα χρειαστούμε την παρακάτω έννοια συμμετρίας στις απεικονίσεις:

**Ορισμός 10.6.** Ας είναι  $A, B$  σύνολα και  $p, q$  θετικοί ακέραιοι. Μία απεικόνιση  $f : A^{p+q} \rightarrow B$  καλείται  $(p, q)$ -συμμετρική, αν για κάθε  $(u_1, \dots, u_p) \in A^p$ ,  $(v_1, \dots, v_q) \in A^q$  και κάθε μετάθεση  $\sigma$  του συνόλου  $\{1, \dots, p\}$  και  $\tau$



Σχήμα 10.8: Εφαρμογή του αλγορίθμου υποδιαίρεσης τρίτη φορά.

του συνόλου  $\{1, \dots, q\}$  ισχύει:

$$\begin{aligned} f(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q) &= f(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(p)}, v_1, \dots, v_q) \\ &= f(u_1, \dots, u_p, v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(q)}). \end{aligned}$$

Ας είναι  $\mathcal{E}$  ομοπαράλληλος χώρος πεπερασμένης διάστασης  $\geq 3$ .

**Ορισμός 10.7.** Καλούμε διπολωνυμική επιφάνεια βαθμού  $(p, q)$  σε πολική μορφή μία απεικόνιση  $F : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{E}$  για την οποία υπάρχει μία  $(p, q)$ -συμμετρική και  $p+q$ -ομοπαράλληλική απεικόνιση  $f : \mathbb{A}^p \times \mathbb{A}^q \rightarrow \mathcal{E}$  τέτοια, ώστε να ισχύει:

$$F(u, v) = f(\underbrace{(u, \dots, u)}_p, \underbrace{(v, \dots, v)}_q),$$

για κάθε  $u, v \in \mathbb{A}$ . Η απεικόνιση  $f$  καλείται πολική μορφή της  $F$ . Επίσης, το σύνολο  $F(\mathbb{A} \times \mathbb{A})$  καλείται ίχνος της  $F$ .

Παρατηρούμε ότι για κάθε  $v \in \mathbb{A}$  η αντιστοιχία  $u \mapsto F(u, v)$  ορίζει μία πολωνυμική καμπύλη  $F_v : \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{E}$  πολικού βαθμού  $p$  επί του ίχνους της  $F$ . Επίσης, για κάθε  $u \in \mathbb{A}$  η αντιστοιχία  $v \mapsto F(u, v)$  ορίζει μία πολωνυμική καμπύλη  $F_u : \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{E}$  πολικού βαθμού  $q$  επί του ίχνους της  $F$ .

**Ορισμός 10.8.** Οι καμπύλες  $F_v$  και  $F_u$  καλούνται ισοπαραμετρικές καμπύλες

**Παράδειγμα 10.9.** Θεωρούμε την απεικόνιση

$$F : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}^3, (u, v) \longmapsto (u^2 - 2uv - 4v + 1, v^2 + 2, 2uv^2 - 1)$$

Θα δείξουμε ότι η  $F$  είναι διπολωνυμική επιφάνεια πολικού βαθμού  $(2, 2)$ .

Θεωρώντας το  $u$  ως σταθερό παίρνουμε την ισοπαραμετρική καμπύλη  $F_u$  της οποίας η πολική μορφή είναι η απεικόνιση  $f_u : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^3$  με

$$f_u(v_1, v_2) = (u^2 - u(v_1 + v_2) - 2(v_1 + v_2) + 1, v_1 v_2 + 2, 2v_1 v_2 u - 1).$$

Στη συνέχεια θεωρώντας ως σταθερά τα  $u_1, u_2$  παίρνουμε μία πολωνυμική καμπύλη επί του  $\mathbb{A}^3$  πολικού βαθμού 2 της οποίας η πολική μορφή είναι η απεικόνιση

$$f_{u_1, u_2}(v_1, v_2) = (f_1(u_1, u_2, v_1, v_2), f_2(u_1, u_2, v_1, v_2), f_3(u_1, u_2, v_1, v_2)),$$

όπου

$$\begin{aligned} f_1(u_1, u_2, v_1, v_2) &= u_1 u_2 - \frac{1}{2}(u_1 + u_2)(v_1 + v_2) - 2(v_1 + v_2) + 1, \\ f_2(u_1, u_2, v_1, v_2) &= v_1 v_2 + 2, \\ f_3(u_1, u_2, v_1, v_2) &= v_1 v_2 (u_1 + u_2) - 1. \end{aligned}$$

Έτσι, η απεικόνιση  $f : \mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^3$  με  $f((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = f_{u_1, u_2}(v_1, v_2)$ , για κάθε  $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in \mathbb{A}^2$ , είναι (2, 2)-συμμετρική, 4-ομοπαράλληλική και για κάθε  $(u, v) \in \mathbb{A} \times \mathbb{A}$  ισχύει:

$$f((u, v), (u, v)) = F(u, v).$$

Επομένως, η  $F$  είναι διπολυωνυμική επιφάνεια πολικού βαθμού (2, 2) με πολική μορφή την  $f$ .

Ας είναι  $F : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{E}$  μία διπολυωνυμική επιφάνεια βαθμού  $(p, q)$  σε πολική μορφή και  $f$  η πολική της μορφή. Θεωρούμε δύο ομοπαράλληλα πλαίσια  $(r_1, s_1), (r_2, s_2)$  του  $\mathbb{A}$  και  $(u_1, \dots, u_p) \in \mathbb{A}^p, (v_1, \dots, v_q) \in \mathbb{A}^q$ . Από το Θεώρημα 6.1 έχουμε:

$$f((u_1, \dots, u_p), (v_1, \dots, v_q)) = \sum_{\substack{I \cup J = \{1, \dots, p\} \\ I \cap J = \emptyset}} \prod_{i \in I} \frac{s_1 - u_i}{s_1 - r_1} \prod_{j \in J} \frac{u_j - r_1}{s_1 - r_1} f((r_1, \dots, r_1, \underbrace{s_1, \dots, s_1}_{|J|}), (v_1, \dots, v_q))$$

και

$$f((u_1, \dots, u_p), (v_1, \dots, v_q)) = \sum_{\substack{K \cup L = \{1, \dots, q\} \\ K \cap L = \emptyset}} \prod_{k \in K} \frac{s_2 - u_k}{s_2 - r_2} \prod_{l \in L} \frac{u_l - r_2}{s_2 - r_2} f((u_1, \dots, u_p), (r_2, \dots, r_2, \underbrace{s_2, \dots, s_2}_{|L|})).$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω ισότητες και θέτοντας

$$b_{|J|, |L|} = f((r_1, \dots, r_1, \underbrace{s_1, \dots, s_1}_{|J|}), (r_2, \dots, r_2, \underbrace{s_2, \dots, s_2}_{|L|})),$$

παίρνουμε:

$$f((u_1, \dots, u_p), (v_1, \dots, v_q)) = \sum_{\substack{I \cup J = \{1, \dots, p\} \\ I \cap J = \emptyset}} \prod_{i \in I} \frac{s_1 - u_i}{s_1 - r_1} \prod_{j \in J} \frac{u_j - r_1}{s_1 - r_1} \prod_{k \in K} \frac{s_2 - u_k}{s_2 - r_2} \prod_{l \in L} \frac{u_l - r_2}{s_2 - r_2} b_{|J|, |L|}.$$

Από την άλλη πλευρά, για κάθε ακολουθία  $(p+1)(q+1)$  σημείων του  $\mathcal{E}$ ,  $b_{j,l}$  ( $j = 0, \dots, p, l = 0, \dots, q$ ) θεωρούμε την απεικόνιση  $f : \mathbb{A}^p \times \mathbb{A}^q \rightarrow \mathcal{E}$  η οποία ορίζεται από την παραπάνω σχέση. Παρατηρούμε ότι η  $f$  είναι  $(p, q)$ -συμμετρική, πολυομοπαράλληλική και για κάθε  $j \in \{0, \dots, p\}, l \in \{0, \dots, q\}$  ισχύει

$$f((r_1, \dots, r_1, \underbrace{s_1, \dots, s_1}_j), (r_2, \dots, r_2, \underbrace{s_2, \dots, s_2}_l)) = b_{j,l}.$$

Θέτουμε

$$\Pi_{p,q} = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 / 0 \leq i \leq p, 0 \leq j \leq q\}.$$

**Ορισμός 10.9.** Τα σημεία

$$f((r_1, \dots, r_1, \underbrace{s_1, \dots, s_1}_i), (r_2, \dots, r_2, \underbrace{s_2, \dots, s_2}_j)), \quad (i, j) \in \Pi_{p,q}$$

καλούνται *σημεία ελέγχου* της επιφάνειας  $F$  ως προς τα ομοπαράλληλα πλαίσια  $(r_1, s_1)$  και  $(r_2, s_2)$ . Γενικότερα, μία οικογένεια σημείων του  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{N} = (b_{i,j})_{(i,j) \in \Pi_{p,q}}$ , καλείται *τετραγωνικό δίκτυο ελέγχου βαθμού  $(p, q)$* .

Συνοψίζουμε τα παραπάνω στην επόμενη πρόταση:

**Πρόταση 10.2.** Ας είναι  $(r_1, s_1)$  και  $(r_2, s_2)$  δύο ομοπαράλληλα πλαίσια του  $\mathbb{A}$ . Αν  $f : \mathbb{A}^p \times \mathbb{A}^q \rightarrow \mathcal{E}$  είναι  $(p, q)$ -συμμετρική,  $p + q$ -ομοπαράλληλική απεικόνιση, τότε ισχύει:

$$f((u_1, \dots, u_p), (v_1, \dots, v_q)) = \sum_{\substack{I \cup J = \{1, \dots, p\} \\ I \cap J = \emptyset \\ K \cup L = \{1, \dots, q\} \\ K \cap L = \emptyset}} \prod_{i \in I} \frac{s_1 - u_i}{s_1 - r_1} \prod_{j \in J} \frac{u_j - r_1}{s_1 - r_1} \prod_{k \in K} \frac{s_2 - v_k}{s_2 - r_2} \prod_{l \in L} \frac{v_l - r_2}{s_2 - r_2} b_{|I|, |L|},$$

όπου

$$b_{|I|, |L|} = f(\underbrace{(r_1, \dots, r_1, s_1, \dots, s_1)}_{|I|}, \underbrace{(r_2, \dots, r_2, s_2, \dots, s_2)}_{|L|}).$$

Αντιστρόφως, αν  $\mathcal{N} = (b_{i,j})_{(i,j) \in \Pi_{p,q}}$  ένα τετραγωνικό δίκτυο ελέγχου βαθμού  $(p, q)$ , τότε υπάρχει μία μοναδική  $(p, q)$ -συμμετρική,  $p + q$ -ομοπαράλληλική απεικόνιση  $f : \mathbb{A}^p \times \mathbb{A}^q \rightarrow \mathcal{E}$  τέτοια, ώστε

$$f(\underbrace{(r_1, \dots, r_1, s_1, \dots, s_1)}_i, \underbrace{(r_2, \dots, r_2, s_2, \dots, s_2)}_j) = b_{i,j}.$$

Επιπλέον, η αντίστοιχη διπολυωνυμική επιφάνεια βαθμού  $(p, q)$ , δίνεται από τη σχέση

$$F(u, v) = f(\underbrace{u, \dots, u}_p, \underbrace{v, \dots, v}_q) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq p \\ 0 \leq j \leq q}} B_i^p[r_1, s_1](u) B_j^q[r_2, s_2](v) b_{i,j}.$$

**Παράδειγμα 10.10.** Θεωρούμε τα ομοπαράλληλα πλαίσια,  $(r_1, s_1) = (0, 1)$ ,  $(r_2, s_2) = (1, 2)$  του  $\mathbb{A}$ , και το τετραγωνικό δίκτυο ελέγχου βαθμού  $(2, 1)$  στο  $\mathbb{A}^3$ ,  $b_{0,0} = (1, 0, 1)$ ,  $b_{1,0} = (-1, 0, 0)$ ,  $b_{2,0} = (0, 1, -1)$ ,  $b_{0,1} = (1, 0, -2)$ ,  $b_{1,1} = (1, -1, -1)$ ,  $b_{2,1} = (0, 0, -1)$ . Η αντίστοιχη διπολυωνυμική επιφάνεια βαθμού  $(2, 1)$  είναι η απεικόνιση  $F : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{E}$  με

$$F(u, v) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq 2 \\ 0 \leq j \leq 1}} B_i^2(u) B_j^1[r_2, s_2](v) b_{i,j}$$

ή

$$F(u, v) = (F_1(u, v), F_2(u, v), F_3(u, v)),$$

όπου

$$\begin{aligned} F_1(u, v) &= -3u^2v + 4u^2 + 2uv - 4u + v \\ F_2(u, v) &= 3u^2v - 2u^2 - 4uv + 4u \\ F_3(u, v) &= u^2v - 3u^2 + 4uv - 4u - 5v + 6. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα δώσουμε ένα θεώρημα χαρακτηρισμού των διπολυωνυμικών επιφανειών ανάλογο με το Θεώρημα 10.1.

**Θεώρημα 10.2.** Ας είναι  $\mathcal{E}$  ένας ομοπαράλληλικός χώρος διάστασης  $n \geq 3$  και  $(a_0, \dots, a_{n+1})$  ένα ομοπαράλληλο πλαίσιο του. Θετούμε  $\vec{e}_i = a_0 \vec{a}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Η απεικόνιση  $F : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{E}$  ορίζει μία διπολυωνυμική επιφάνεια βαθμού  $(p, q)$ , αν και μόνον αν, υπάρχουν πολυώνυμα  $F_i(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$  ( $i = 1, \dots, n$ ) με

$$p \geq \max\{\deg_x F_1, \dots, \deg_x F_n\} \text{ και } q \geq \max\{\deg_y F_1, \dots, \deg_y F_n\}$$

τέτοια, ώστε για κάθε  $u, v \in \mathbb{A}$  να ισχύει:

$$F(u, v) = a_0 + F_1(u, v)\vec{e}_1 + \dots + F_n(u, v)\vec{e}_n.$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν  $F_i(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$  ( $i = 1, \dots, n$ ) με

$$p \geq \max\{\deg_x F_1, \dots, \deg_x F_n\} \text{ και } q \geq \max\{\deg_y F_1, \dots, \deg_y F_n\}$$

τέτοια, ώστε για κάθε  $u, v \in \mathbb{A}$  να ισχύει:

$$F(u, v) = a_0 + F_1(u, v)\vec{e}_1 + \dots + F_n(u, v)\vec{e}_n.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 6.4, για κάθε  $v \in \mathbb{A}$  υπάρχει μοναδική συμμετρική  $p$ -ομοπαράλληλική απεικόνιση  $f_v^j : \mathbb{A}^p \rightarrow \mathbb{A}$  με  $f_v^j(u, \dots, u) = F_j(u, v)$ , για κάθε  $u \in \mathbb{A}$ . Από το Παράδειγμα 5.9, για κάθε  $(u_1, \dots, u_p) \in \mathbb{A}^p$ , έχουμε:

$$f_v^j(u_1, \dots, u_p) = A_0^j(v) + \sum_{k=1}^p A_k^j(v) \sum_{i_1 < \dots < i_k} u_{i_1}, \dots, u_{i_k},$$

όπου  $A_k^j(y) \in \mathbb{R}[y]$  με  $\deg A_k^j \leq q$ . Από την Πρόταση 6.4, έχουμε ότι για κάθε  $k \in \{0, \dots, p\}$ , υπάρχει μοναδική συμμετρική  $q$ -ομοπαράλληλική απεικόνιση  $a_k^j : \mathbb{A}^q \rightarrow \mathbb{A}$  με  $a_k^j(v, \dots, v) = A_k^j(v)$ , για κάθε  $v \in \mathbb{A}$ . Στη συνέχεια, θεωρούμε την απεικόνιση  $f_j : \mathbb{A}^p \times \mathbb{A}^q \rightarrow \mathbb{A}$  με

$$f_j((u_1, \dots, u_p), (v_1, \dots, v_q)) = a_0^j(v_1, \dots, v_q) + \sum_{k=1}^p a_k^j(v_1, \dots, v_q) \sum_{i_1 < \dots < i_k} u_{i_1}, \dots, u_{i_k}.$$

Οπότε, για κάθε  $u, v \in \mathbb{A}$ , ισχύει:

$$f_j(\underbrace{(u, \dots, u)}_p, \underbrace{(v, \dots, v)}_q) = f_v^j(u, \dots, u) = F_j(u, v).$$

Σύμφωνα με το Πρόσχημα 5.1, για κάθε  $v_1, \dots, v_q \in \mathbb{A}$ , η αντιστοιχία

$$(u_1, \dots, u_p) \mapsto f_j((u_1, \dots, u_p), (v_1, \dots, v_q))$$

ορίζει μία συμμετρική και  $p$ -ομοπαράλληλική απεικόνιση. Επίσης, καθώς οι απεικονίσεις  $a_k^j$  είναι συμμετρικές, η  $f_j$  είναι συμμετρική ως προς  $v_1, \dots, v_q$ . Επιπλέον, οι απεικονίσεις  $a_k^j$  είναι  $q$ -ομοπαράλληλικές και επομένως για κάθε  $u_1, \dots, u_p \in \mathbb{R}$  από το Παράδειγμα 5.8 έπεται ότι η  $f_j$  είναι  $q$ -ομοπαράλληλική ως προς  $v_1, \dots, v_q$ . Τέλος, θεωρούμε την απεικόνιση  $f : \mathbb{A}^p \times \mathbb{A}^q \rightarrow \mathcal{E}$  η οποία ορίζεται από τη σχέση

$$f((u_1, \dots, u_p), (v_1, \dots, v_q)) = a_0 + \sum_{j=1}^n f_j((u_1, \dots, u_p), (v_1, \dots, v_q))\vec{e}_j.$$

Η  $f$  είναι προφανώς μία  $(p, q)$ -συμμετρική απεικόνιση. Τέλος, αποδεικνύεται, όπως και η αντίστοιχη απεικόνιση στο Θεώρημα 6.2, ότι η απεικόνιση  $f$  είναι  $p+q$ -ομοπαράλληλική. Συνεπώς, η  $F$  ορίζει μία διπολυωνυμική επιφάνεια με πολική μορφή την  $f$ .

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η απεικόνιση  $F : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{E}$  είναι μία διπολυωνυμική επιφάνεια βαθμού  $(p, q)$ . Τότε, από την Πρόταση 10.2 για  $(r_1, s_1) = (r_1, s_1) = (0, 1)$ , έχουμε:

$$F(u, v) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq p \\ 0 \leq j \leq q}} B_i^p(u) B_j^q(v) b_{i,j},$$

όπου

$$b_{i,j} = f(\underbrace{(r, \dots, r}_{p-i}, \underbrace{s, \dots, s}_i), \underbrace{(r, \dots, r}_{q-j}, \underbrace{s, \dots, s}_j)).$$

Στη συνέχεια, γράφουμε:

$$b_{i,j} = a_0 + b_{i,j}^{(1)}\vec{e}_1 + \dots + b_{i,j}^{(n)}\vec{e}_n,$$

όπου  $b_{i,j}^{(1)}, \dots, b_{i,j}^{(n)} \in \mathbb{R}$  ( $i = 0, \dots, p, j = 0, \dots, q$ ). Έτσι, προκύπτει:

$$\begin{aligned} F(u, v) &= a_0 + \sum_{\substack{0 \leq i \leq p \\ 0 \leq j \leq q}} B_i^p(u) B_j^q(v) (b_{i,j}^{(1)}\vec{e}_1 + \dots + b_{i,j}^{(n)}\vec{e}_n) \\ &= a_0 + \sum_{l=1}^n \left( \sum_{\substack{0 \leq i \leq p \\ 0 \leq j \leq q}} B_i^p(u) B_j^q(v) b_{i,j}^{(l)} \right) \vec{e}_l. \end{aligned}$$

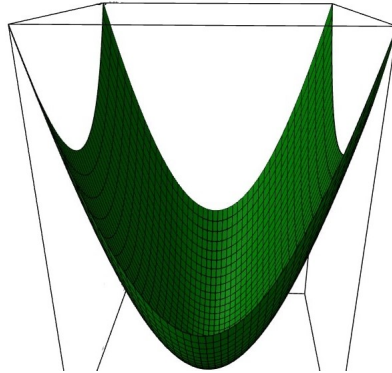
Οπότε, έχουμε:

$$F(u, v) = a_0 + \sum_{l=1}^n F_l(u, v) \vec{e}_l,$$

όπου

$$F_l(x, y) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq p \\ 0 \leq j \leq q}} B_i^p(x) B_j^q(y) b_{i,j}^{(l)}.$$

Καθώς ισχύει  $\deg B_i^p(x) = p$  και  $\deg B_j^q(y) = q$ , έχουμε  $\deg_x F_l \leq p$  και  $\deg_y F_l \leq q$ . □



Σχήμα 10.9: Η επιφάνεια  $z = 2x^2 + y^2$  του Παραδείγματος 10.11.

**Παράδειγμα 10.11.** Θεωρούμε την απεικόνιση

$$F : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}^3, (u, v) \longmapsto (u, v, 2u^2 + v^2).$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 10.2, η  $F$  ορίζει μία διπολυωνυμική επιφάνεια βαθμού  $(2, 2)$ . Η πολική μορφή της  $F$  είναι η απεικόνιση  $f : \mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^3$  με

$$f((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = \left( \frac{1}{2}(u_1 + u_2), \frac{1}{2}(v_1 + v_2), 2u_1u_2 + v_1v_2 \right).$$

Τα σημεία ελέγχου της  $F$  ως προς τα ομοπαράλληλα πλαίσια  $(0, 1)$  και  $(-1, 1)$  είναι:

$$b_{0,0} = f((0, 0), (-1, -1)) = (0, -1, 1),$$

$$b_{1,0} = f((0, 1), (-1, -1)) = \left( \frac{1}{2}, -1, 1 \right),$$

$$\begin{aligned}
 b_{2,0} &= f((1, 1), (-1, -1)) = (1, -1, 3), \\
 b_{0,1} &= f((0, 0), (-1, 1)) = (0, 0, -1), \\
 b_{0,2} &= f((0, 0), (1, 1)) = (0, 1, 1), \\
 b_{1,1} &= f((0, 1), (-1, 1)) = \left(\frac{1}{2}, 0, -1\right), \\
 b_{1,2} &= f((0, 1), (1, 1)) = \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right), \\
 b_{2,1} &= f((1, 1), (-1, 1)) = (1, 0, 1), \\
 b_{2,2} &= f((1, 1), (1, 1)) = (1, 1, 3).
 \end{aligned}$$

Τέλος, ας σημειωθεί ότι το ίχνος της  $F$  είναι το σύνολο

$$F(\mathbb{A} \times \mathbb{A}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{A}^3 / z = 2x^2 + y^2\}.$$

Στη συνέχεια δίνουμε τον εξής γενικότερο ορισμό:

**Ορισμός 10.10.** Ας είναι  $\mathcal{E}$  ένας ομοπαράλληλικός χώρος διάστασης  $n \geq 3$  και  $(a_0, \dots, a_{n+1})$  ένα ομοπαράλληλικό πλαίσιο του. Θέτουμε  $\vec{e}_i = a_0 \vec{a}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Μία απεικόνιση  $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}$  καλείται (παραμετροποιημένη) πολυωνυμική επιφάνεια, αν υπάρχουν πολώνυμα  $F_i(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$  ( $i = 1, \dots, n$ ) τέτοια, ώστε για κάθε  $u, v \in \mathbb{A}$  να ισχύει:

$$F(u, v) = a_0 + F_1(u, v)\vec{e}_1 + \dots + F_n(u, v)\vec{e}_n.$$

Από τα θεωρήματα 10.1 και 10.2 προκύπτει ότι μία πολυωνυμική επιφάνεια χαρακτηρίζεται ως επιφάνεια ολικού βαθμού ή διπολυωνυμική επιφάνεια σε σχέση με τον τρόπο τον οποίο επιλέγουμε για να θεωρήσουμε την πολική της μορφή.

### 10.5 Αλγόριθμος του de Casteljau για Διπολυωνυμικές Επιφάνειες

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε την εκδοχή του αλγορίθμου του de Casteljau για την περίπτωση των διπολυωνυμικών επιφανειών. Ας είναι  $(r_1, s_1)$  και  $(r_2, s_2)$  δύο ομοπαράλληλα πλαίσια του  $\mathbb{A}$  και  $\mathcal{N} = (b_{i,j})_{(i,j) \in \Pi_{p,q}}$  ένα τετραγωνικό δίκτυο ελέγχου βαθμού  $(p, q)$ . Από την Πρόταση 10.2 έπεται ότι υπάρχει μία μοναδική  $(p, q)$ -συμμετρική,  $p + q$ -ομοπαράλληλική απεικόνιση  $f : \mathbb{A}^p \times \mathbb{A}^q \rightarrow \mathcal{E}$  τέτοια, ώστε

$$f(\underbrace{(r_1, \dots, r_1, s_1, \dots, s_1)}_i, \underbrace{(r_2, \dots, r_2, s_2, \dots, s_2)}_j) = b_{i,j}.$$

Ας είναι  $F : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{E}$  η αντίστοιχη διπολυωνυμική επιφάνεια βαθμού  $(p, q)$  και  $u, v \in \mathbb{A}$ . Ο αλγόριθμος του de Casteljau υπολογίζει το σημείο  $F(u, v)$ . Για κάθε  $i = 0, \dots, p$ , ο αλγόριθμος του de Casteljau (για καμπύλες) εφαρμόζεται στα σημεία ελέγχου  $b_{i,0}, \dots, b_{i,q}$  και δίνει το σημείο  $b_{i,*}$ . Στη συνέχεια, ο αλγόριθμος αυτός εφαρμόζεται στα σημεία  $b_{0,*}, \dots, b_{p,*}$  και προκύπτει το σημείο  $F(u, v)$ . Πιο αναλυτικά, η διαδικασία αυτή παρουσιάζεται παρακάτω.

**Αλγόριθμος 10.3.** Αλγόριθμος του de Casteljau-1.

*Είσοδος:* Ένα τετραγωνικό δίκτυο ελέγχου βαθμού  $(p, q)$ ,  $\mathcal{N} = (b_{i,j})_{(i,j) \in \Pi_{p,q}}$ , δύο ομοπαράλληλα πλαίσια  $(r_1, s_1), (r_2, s_2)$  του  $\mathbb{A}$  και  $u, v \in \mathbb{A}$ .

*Έξοδος:* Το σημείο  $F(u, v)$ .

1. Για κάθε  $(i, j) \in \Pi_{p,q}$ , θέτουμε  $b_{i*,j}^0 = b_{i,j}$ .
2. Για κάθε  $i = 0, \dots, p$ ,



(α) για κάθε  $j = 1, \dots, q$  και  $k = 0, \dots, q - j$  υπολογίζουμε:

$$b_{i^*,k}^j = \frac{s_2 - v}{s_2 - r_2} b_{i^*,k}^{j-1} + \frac{v - r_2}{s_2 - r_2} b_{i^*,k+1}^{j-1}.$$

(β) Θέτουμε  $b_{i^*} = b_{i^*,0}^q$ .

3. Για  $i = 0, \dots, p$ , θέτουμε  $b_{i^*}^0 = b_{i^*}$ .

4. Για  $j = 1, \dots, p$  και  $i = 0, \dots, p - j$  υπολογίζουμε:

$$b_{i^*}^j = \frac{s_1 - u}{s_1 - r_1} b_{i^*}^{j-1} + \frac{u - r_1}{s_1 - r_1} b_{i+1^*}^{j-1}.$$

5. Εξάγουμε το σημείο  $b_{0^*}^p$ .

Απόδειξη της ορθότητας του αλγορίθμου. Θα δείξουμε πρώτα ότι για κάθε  $i \in \{0, \dots, p\}$  ισχύει:

$$b_{i^*,k}^j = f(\underbrace{(r_1, \dots, r_1, s_1, \dots, s_1)}_i, \underbrace{(v, \dots, v, r_2, \dots, r_2, s_2, \dots, s_2)}_j),$$

όπου  $j = 1, \dots, q$  και  $k = 0, \dots, q - j$ . Για  $j = 1$ , έχουμε:

$$b_{i^*,k}^1 = \frac{s_2 - v}{s_2 - r_2} b_{i^*,k}^0 + \frac{v - r_2}{s_2 - v_2} b_{i^*,k+1}^0 = \frac{s_2 - v}{s_2 - r_2} b_{i,k} + \frac{v - r_2}{s_2 - v_2} b_{i,k+1}.$$

Καθώς η απεικόνιση  $f$  είναι πολυμομοπαράλληλη και

$$b_{i,j} = f(\underbrace{(r_1, \dots, r_1, s_1, \dots, s_1)}_i, \underbrace{(r_2, \dots, r_2, s_2, \dots, s_2)}_j) \quad (j = k, k + 1),$$

η παραπάνω ισότητα μας δίνει:

$$b_{i^*,k}^1 = f(\underbrace{(r_1, \dots, r_1, s_1, \dots, s_1)}_i, \underbrace{(v, r_2, \dots, r_2, s_2, \dots, s_2)}_k).$$

Ας υποθέσουμε στη συνέχεια ότι η ισότητα ισχύει για  $j = l$ . Θα δείξουμε ότι ισχύει και για  $j = l + 1$ . Έχουμε:

$$b_{i^*,k}^{l+1} = \frac{s_2 - v}{s_2 - r_2} b_{i^*,k}^l + \frac{v - r_2}{s_2 - v_2} b_{i^*,k+1}^l.$$

Σύμφωνα με την υπόθεση της επαγωγής, για  $\mu = k, k + 1$ , ισχύει:

$$b_{i^*,\mu}^l = f(\underbrace{(r_1, \dots, r_1, s_1, \dots, s_1)}_i, \underbrace{(v, \dots, v, r_2, \dots, r_2, s_2, \dots, s_2)}_l).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, παίρνουμε:

$$b_{i^*,k}^{l+1} = f(\underbrace{(r_1, \dots, r_1, s_1, \dots, s_1)}_i, \underbrace{(v, \dots, v, r_2, \dots, r_2, s_2, \dots, s_2)}_{l+1}).$$

Επομένως, η προς απόδειξη ισότητα ισχύει. Έτσι, για  $j = q$ , προκύπτει:

$$b_{i^*} = b_{i^*,0}^q = f(\underbrace{(r_1, \dots, r_1, s_1, \dots, s_1)}_i, (v, \dots, v)).$$

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι ισχύει:

$$b_{i*}^j = f(\underbrace{(u, \dots, u, r_1, \dots, r_1, s_1, \dots, s_1)}_j, \underbrace{(v, \dots, v)}_i).$$

Για  $j = 1$  έχουμε:

$$\begin{aligned} b_{i*}^1 &= \frac{s_1 - u}{s_1 - r_1} b_{i*} + \frac{u - r_1}{s_1 - v_1} b_{i+1*} \\ &= \frac{s_1 - u}{s_1 - r_1} f(\underbrace{(r_1, \dots, r_1, s_1, \dots, s_1)}_i, (v, \dots, v)) \\ &\quad + \frac{u - r_1}{s_1 - v_1} f(\underbrace{(r_1, \dots, r_1, s_1, \dots, s_1)}_{i+1}, (v, \dots, v)) \\ &= f(\underbrace{(u, r_1, \dots, r_1, s_1, \dots, s_1)}_i, (v, \dots, v)). \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι η ισότητα ισχύει για  $j = l$ . Θα δείξουμε ότι ισχύει για  $j = l + 1$ . Έχουμε:

$$b_{i*}^{l+1} = \frac{s_1 - u}{s_1 - r_1} b_{i*}^l + \frac{u - r_1}{s_1 - v_1} b_{i+1*}^l.$$

Επίσης, από την υπόθεση της επαγωγής, για  $\mu = i, i + 1$ , ισχύει:

$$b_{\mu*}^l = f(\underbrace{(u, \dots, u, r_1, \dots, r_1, s_1, \dots, s_1)}_l, \underbrace{(v, \dots, v)}_\mu).$$

Οπότε, η πολυμομοπαρλληλικότητα της  $f$  δίνει:

$$b_{i*}^{l+1} = f(\underbrace{(u, \dots, u, r_1, \dots, r_1, s_1, \dots, s_1)}_{l+1}, \underbrace{(v, \dots, v)}_i).$$

Άρα, η προς απόδειξη ισότητα αληθεύει. Έτσι, για  $j = p$ , παίρνουμε:

$$b_{0*}^p = f((u, \dots, u), (v, \dots, v)) = F(u, v).$$

**Παράδειγμα 10.12.** Ας είναι  $\mathcal{N} = (b_{i,j})_{(i,j) \in \Pi_{2,2}}$  ένα τετραγωνικό δίκτυο ελέγχου βαθμού  $(2, 2)$  στο  $\mathbb{A}^3$ , όπου

$$\begin{aligned} b_{0,0} &= (0, 1, 0), & b_{0,1} &= (1, 0, 1), & b_{0,2} &= (-1, 0, 0), \\ b_{1,0} &= (1, 0, -1), & b_{2,0} &= (2, -1, 0), & b_{1,1} &= (2, 0, -1), \\ b_{1,2} &= (1, 2, -1), & b_{2,1} &= (0, 2, 1), & b_{2,2} &= (1, 2, -2). \end{aligned}$$

Επίσης, θεωρούμε τα ομοπαρλληλικά πλαίσια  $(0, 2)$ ,  $(-1, 1)$  του  $\mathbb{A}$ . Συμβολίζουμε με  $F$  τη διπολυωνμική επιφάνεια η οποία ορίζεται από τα δύο ομοπαρλληλικά πλαίσια και το τετραγωνικό δίκτυο ελέγχου  $\mathcal{N}$ . Θα υπολογίσουμε το σημείο  $F(1, 0)$  εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του de Casteljaeu-1.

Αρχίζοντας, για κάθε  $(i, j) \in \Pi_{2,2}$ , θέτουμε  $b_{i*}^0 = b_{i,j}$ . Για  $i = 0$  και  $(j, k) = (1, 0), (1, 1), (2, 0)$  έχουμε:

$$\begin{aligned} b_{0*,0}^1 &= \frac{1}{2} b_{0,0} + \frac{1}{2} b_{0,1} = \frac{1}{2} (0, 1, 0) + \frac{1}{2} (1, 0, 1) = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \\ b_{0*,1}^1 &= \frac{1}{2} b_{0,1} + \frac{1}{2} b_{0,2} = \frac{1}{2} (1, 0, 1) + \frac{1}{2} (-1, 0, 0) = \left( 0, 0, \frac{1}{2} \right), \end{aligned}$$

$$b_{0^*,0}^2 = \frac{1}{2}b_{0^*,0}^1 + \frac{1}{2}b_{0^*,1}^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(0, 0, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right).$$

Θέτουμε:

$$b_{0^*} = b_{0^*,0}^2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right).$$

Για  $i = 1$  και  $(j, k) = (1, 0), (1, 1), (2, 0)$  έχουμε:

$$b_{1^*,0}^1 = \frac{1}{2}b_{1,0} + \frac{1}{2}b_{1,1} = \frac{1}{2}(1, 0, -1) + \frac{1}{2}(2, 0, -1) = \left(\frac{3}{2}, 0, -1\right),$$

$$b_{1^*,1}^1 = \frac{1}{2}b_{1,1} + \frac{1}{2}b_{1,2} = \frac{1}{2}(2, 0, -1) + \frac{1}{2}(1, 2, -1) = \left(\frac{3}{2}, 1, -1\right),$$

$$b_{1^*,0}^2 = \frac{1}{2}b_{1^*,0}^1 + \frac{1}{2}b_{1^*,1}^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}, 0, -1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}, 1, -1\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -1\right).$$

Θέτουμε:

$$b_{1^*} = b_{1^*,0}^2 = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -1\right).$$

Για  $i = 2$  και  $(j, k) = (1, 0), (1, 1), (2, 0)$  παίρνουμε:

$$b_{2^*,0}^1 = \frac{1}{2}b_{2,0} + \frac{1}{2}b_{2,1} = \frac{1}{2}(2, -1, 0) + \frac{1}{2}(0, 2, 1) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$b_{2^*,1}^1 = \frac{1}{2}b_{2,1} + \frac{1}{2}b_{2,2} = \frac{1}{2}(0, 2, 1) + \frac{1}{2}(1, 2, -2) = \left(\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}\right),$$

$$b_{2^*,0}^2 = \frac{1}{2}b_{2^*,0}^1 + \frac{1}{2}b_{2^*,1}^1 = \frac{1}{2}\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, 0\right).$$

Θέτουμε:

$$b_{2^*} = b_{2^*,0}^2 = \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, 0\right).$$

Τέλος, για  $(j, i) = (1, 0), (1, 1), (2, 0)$ , έχουμε:

$$b_{0^*}^1 = \frac{1}{2}b_{0^*} + \frac{1}{2}b_{1^*} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -1\right) = \left(\frac{7}{8}, \frac{3}{8}, -\frac{1}{4}\right),$$

$$b_{1^*}^1 = \frac{1}{2}b_{1^*} + \frac{1}{2}b_{2^*} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, 0\right) = \left(\frac{9}{8}, \frac{7}{8}, -\frac{1}{2}\right),$$

$$b_{0^*}^2 = \frac{1}{2}b_{0^*}^1 + \frac{1}{2}b_{1^*}^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{8}, \frac{3}{8}, -\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{9}{8}, \frac{7}{8}, -\frac{1}{2}\right) = \left(1, \frac{5}{8}, -\frac{3}{8}\right).$$

Έτσι, παίρνουμε:

$$F(1, 0) = b_{0^*}^2 = \left(1, \frac{5}{8}, -\frac{3}{8}\right).$$

Εναλλακτικά, για κάθε  $j = 1, \dots, q$  ο αλγόριθμος του de Casteljau (για καμπύλες) εφαρμόζεται στα σημεία ελέγχου  $b_{0,j}, \dots, b_{p,j}$  και δίνει το σημείο  $b_{*j}$ . Στη συνέχεια, ο ίδιος αλγόριθμος εφαρμόζεται στα σημεία  $b_{*0}, \dots, b_{*q}$  και υπολογίζεται το σημείο  $F(u, v)$ . Παρακάτω δίνουμε και αυτή την εκδοχή του αλγορίθμου του de Casteljau.

#### Αλγόριθμος 10.4. Αλγόριθμος του de Casteljau-2.

*Είσοδος:* Ένα τετραγωνικό δίκτυο ελέγχου βαθμού  $(p, q)$ ,  $\mathcal{N} = (b_{i,j})_{(i,j) \in \Pi_{p,q}}$ , δύο ομοπαραλληλικά πλαίσια  $(r_1, s_1), (r_2, s_2)$  του  $\mathbb{A}$  και  $u, v \in \mathbb{A}$ .

*Έξοδος:* Το σημείο  $F(u, v)$ .

1. Για κάθε  $(i, j) \in \Pi_{p,q}$ , θέτουμε  $b_{i^*,j}^0 = b_{i,j}$ .
2. Για κάθε  $j = 0, \dots, q$ ,

(α) για κάθε  $i = 1, \dots, p$  και  $k = 0, \dots, p - i$  υπολογίζουμε:

$$b_{k,*j}^i = \frac{s_1 - u}{s_1 - r_1} b_{k,*j}^{i-1} + \frac{u - r_1}{s_1 - r_1} b_{k+1,*j}^{i-1}.$$

(β) Θέτουμε  $b_{*j} = b_{0,*j}^p$ .

3. Για  $j = 0, \dots, q$ , θέτουμε  $b_{*j}^0 = b_{*j}$ .

4. Για  $i = 1, \dots, q$  και  $j = 0, \dots, q - i$  υπολογίζουμε:

$$b_{*j}^i = \frac{s_2 - v}{s_2 - r_2} b_{*j}^{i-1} + \frac{v - r_2}{s_2 - r_2} b_{*j+1}^{i-1}.$$

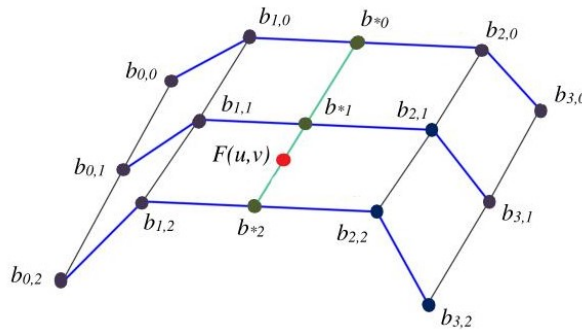
5. Εξάγουμε το σημείο  $b_{*0}^q$ .

Η απόδειξη της ορθότητας του αλγορίθμου είναι παρόμοια με αυτή της προηγούμενης εκδοχής του. Ας σημειωθεί όμως ότι έχουμε:

$$b_{k,*j}^i = f(\underbrace{(u, \dots, u)}_i, \underbrace{(r_1, \dots, r_1)}_k, \underbrace{(s_1, \dots, s_1)}_j, \underbrace{(r_2, \dots, r_2)}_j, \underbrace{(s_2, \dots, s_2)}_j)$$

και

$$b_{*j}^i = f(\underbrace{(u, \dots, u)}_i, \underbrace{(v, \dots, v)}_i, \underbrace{(r_2, \dots, r_2)}_j, \underbrace{(s_2, \dots, s_2)}_j).$$



Σχήμα 10.10: Ο αλγόριθμος του De Casteljau-2 για  $(p, q) = (3, 2)$ .

**Παράδειγμα 10.13.** Θεωρούμε το δίκτυο  $\mathcal{N} = (b_{i,j})_{(i,j) \in \Pi_{2,2}}$  του Παραδείγματος 10.12, τα ομοπαράλληλα πλαίσια  $(0, 2)$ ,  $(-1, 1)$ , καθώς και τη διπολυωνμική επιφάνεια  $F$  η οποία ορίζεται από αυτά. Θα υπολογίσουμε το σημείο  $F(1, 0)$  χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του de Casteljau-2.

Πρώτα, για κάθε  $(i, j) \in \Pi_{2,2}$ , θέτουμε  $b_{i,*j}^0 = b_{i,j}$ . Για  $j = 0$  και  $(i, k) = (1, 0), (1, 1), (2, 0)$  έχουμε:

$$b_{0,*0}^1 = \frac{1}{2} b_{0,*0} + \frac{1}{2} b_{1,*0} = \frac{1}{2} (0, 1, 0) + \frac{1}{2} (1, 0, -1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right),$$

$$b_{1,*0}^1 = \frac{1}{2} b_{1,0} + \frac{1}{2} b_{2,0} = \frac{1}{2} (1, 0, -1) + \frac{1}{2} (2, -1, 0) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right),$$

$$b_{0,*0}^2 = \frac{1}{2} b_{0,*0}^1 + \frac{1}{2} b_{1,*0}^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(1, 0, -\frac{1}{2}\right).$$

Θέτουμε:

$$b_{*0} = b_{0,*0}^2 = \left(1, 0, -\frac{1}{2}\right).$$

Για  $j = 1$  και  $(i, k) = (1, 0), (1, 1), (2, 0)$  έχουμε:

$$\begin{aligned} b_{0,*1}^1 &= \frac{1}{2}b_{0,1} + \frac{1}{2}b_{1,1} = \frac{1}{2}(1, 0, 1) + \frac{1}{2}(2, 0, -1) = \left(\frac{3}{2}, 0, -0\right), \\ b_{1,*1}^1 &= \frac{1}{2}b_{1,1} + \frac{1}{2}b_{2,1} = \frac{1}{2}(2, 0, -1) + \frac{1}{2}(0, 2, 1) = (1, 1, 0), \\ b_{0,*1}^2 &= \frac{1}{2}b_{0,*1}^1 + \frac{1}{2}b_{1,*1}^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}, 0, -1\right) + \frac{1}{2}(1, 1, -1) = \left(\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, 0\right). \end{aligned}$$

Θέτουμε:

$$b_{*1} = b_{0,*1}^2 = \left(\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, 0\right).$$

Για  $j = 2$  και  $(i, k) = (1, 0), (1, 1), (2, 0)$  παίρνουμε:

$$\begin{aligned} b_{0,*2}^1 &= \frac{1}{2}b_{0,2} + \frac{1}{2}b_{1,2} = \frac{1}{2}(-1, 0, 0) + \frac{1}{2}(1, 2, -1) = \left(0, 1, -\frac{1}{2}\right), \\ b_{1,*2}^1 &= \frac{1}{2}b_{1,2} + \frac{1}{2}b_{2,2} = \frac{1}{2}(1, 2, -1) + \frac{1}{2}(1, 2, -2) = \left(1, 2, -\frac{3}{2}\right), \\ b_{0,*2}^2 &= \frac{1}{2}b_{0,*2}^1 + \frac{1}{2}b_{1,*2}^1 = \frac{1}{2}\left(0, 1, -\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(1, 2, -\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1\right). \end{aligned}$$

Θέτουμε:

$$b_{*2} = b_{0,*2}^2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1\right).$$

Τέλος, για  $(i, j) = (1, 0), (1, 1), (2, 0)$ , έχουμε:

$$\begin{aligned} b_{*0}^1 &= \frac{1}{2}b_{*0} + \frac{1}{2}b_{*1} = \frac{1}{2}\left(1, 0, -\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, -0\right) = \left(\frac{9}{8}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), \\ b_{*1}^1 &= \frac{1}{2}b_{*1} + \frac{1}{2}b_{*2} = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, -0\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1\right) = \left(\frac{7}{8}, 1, -\frac{1}{2}\right), \\ b_{*0}^2 &= \frac{1}{2}b_{*0}^1 + \frac{1}{2}b_{*1}^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{8}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{7}{8}, 1, -\frac{1}{2}\right) = \left(1, \frac{5}{8}, -\frac{3}{8}\right). \end{aligned}$$

Έτσι, παίρνουμε:

$$F(1, 0) = b_{*0}^2 = \left(1, \frac{5}{8}, -\frac{3}{8}\right).$$

## 10.6 Αλγόριθμος Υποδιαίρεσης για Διπολυωνυμικές Επιφάνειες

Θεωρούμε δύο ομοπαράλληλα πλαίσια του  $\mathbb{A}$ ,  $(r_1, s_1)$  και  $(r_2, s_2)$ , και  $\mathcal{N} = (b_{i,j})_{(i,j) \in \Pi_{p,q}}$  ένα τετραγωνικό δίκτυο ελέγχου βαθμού  $(p, q)$ . Ας είναι  $f : \mathbb{A}^p \times \mathbb{A}^q \rightarrow \mathcal{E}$  η μοναδική  $(p, q)$ -συμμετρική και  $p+q$ -ομοπαράλληλική απεικόνιση  $f : \mathbb{A}^p \times \mathbb{A}^q \rightarrow \mathcal{E}$  με

$$f\left(\underbrace{(r_1, \dots, r_1, s_1, \dots, s_1)}_i, \underbrace{(r_2, \dots, r_2, s_2, \dots, s_2)}_j\right) = b_{i,j},$$

και  $F : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{E}$  η αντίστοιχη διπολυωνυμική επιφάνεια βαθμού  $(p, q)$ .

**Ορισμός 10.11.** Το σύνολο

$$\mathcal{S}_{r_1, s_1, r_2, s_2}(F) = \{F(u, v) \mid r_1 \leq u \leq s_1, r_2 \leq v \leq s_2\}$$

καλείται *τετραγωνικό τεμάχιο* της επιφάνειας  $F$  ως προς τα ομοπαράλληλα πλαίσια  $(r_1, s_1)$  και  $(r_2, s_2)$ . Τα σημεία  $b_{0,0}, b_{0,q}, b_{p,0}, b_{p,q}$  ανήκουν στο  $\mathcal{S}_{r_1, s_1, r_2, s_2}(F)$  και καλούνται *γωνίες* του  $\mathcal{S}_{r_1, s_1, r_2, s_2}(F)$ .

Ας σημειωθεί ότι συνδέοντας κάθε σημείο  $b_{i,j}$  του  $\mathcal{N}$  με τα  $b_{i+1,j}$ ,  $b_{i,j+1}$ ,  $b_{i+1,j+1}$  δημιουργούνται  $pq$  τετράγωνα τα οποία δίνουν μία χονδρική προσέγγιση του τετραγωνικού τεμαχίου  $\mathcal{S}_{r_1,s_1,r_2,s_2}(F)$ . Στη συνέχεια θα δείξουμε πώς προσεγγίζονται τετραγωνικά τεμάχια μίας διπολυωνυμικής επιφάνειας χρησιμοποιώντας διαδοχικές υποδιαιρέσεις.

Ας είναι  $(u, v) \in \mathbb{A} \times \mathbb{A}$  με  $r_1 \leq u \leq s_1$  και  $r_2 \leq v \leq s_2$ . Μπορούμε να υποδιαιρέσουμε το δίκτυο  $\mathcal{N}$  με δύο τρόπους. Ο πρώτος τρόπος είναι να υπολογίσουμε τα δύο δίκτυα  $\mathcal{N}[r_1, u; *]$  και  $\mathcal{N}[u, s_1; *]$ , όπου

$$\mathcal{N}[r_1, u; *]_{i,j} = f((\underbrace{r_1, \dots, r_1, u, \dots, u}_i), (\underbrace{r_2, \dots, r_2, s_2, \dots, s_2}_j)),$$

με  $0 \leq i \leq p$  και  $0 \leq j \leq q$ , και

$$\mathcal{N}[u, s_1; *]_{i,j} = f((\underbrace{u, \dots, u, s_1, \dots, s_1}_i), (\underbrace{r_2, \dots, r_2, s_2, \dots, s_2}_j)),$$

με  $0 \leq i \leq p$  και  $0 \leq j \leq q$ . Για καθένα υπολογισμό χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος του de Casteljau (για καμπύλες)  $q+1$  φορές. Χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς που δώσαμε κατά την παρουσίαση του αλγορίθμου του de Casteljau-2 έχουμε:

$$\mathcal{N}[r_1, u; *]_{i,j} = b_{0,*j}^i \quad \text{και} \quad \mathcal{N}[u, s_1; *]_{i,j} = b_{i,*j}^{p-i}.$$

Ο δεύτερος τρόπος είναι να υπολογίσουμε τα δύο δίκτυα  $\mathcal{N}[*; r_2, v]$  και  $\mathcal{N}[*; v, s_2]$ , όπου

$$\mathcal{N}[*; r_2, v]_{i,j} = f((\underbrace{r_1, \dots, r_1, s_1, \dots, s_1}_i), (\underbrace{r_2, \dots, r_2, v, \dots, v}_j))$$

με  $0 \leq i \leq p$  και  $0 \leq j \leq q$ , και

$$\mathcal{N}[*; v, s_2]_{i,j} = f((\underbrace{r_1, \dots, r_1, s_1, \dots, s_1}_i), (\underbrace{v, \dots, v, s_2, \dots, s_2}_j))$$

με  $0 \leq i \leq p$  και  $0 \leq j \leq q$ . Για καθένα υπολογισμό χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος του de Casteljau (για καμπύλες)  $p+1$  φορές. Χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς που δώσαμε κατά την παρουσίαση του αλγορίθμου του de Casteljau-1 έχουμε:

$$\mathcal{N}[*; r_2, v]_{i,j} = b_{i,*0}^j \quad \text{και} \quad \mathcal{N}[*; v, s_2]_{i,j} = b_{i,*j}^{q-j}.$$

Έτσι, υποδιαιρούμε το  $\mathcal{N}$  με τον δεύτερο τρόπο στα δίκτυα  $\mathcal{N}[*; r_2, v]$ ,  $\mathcal{N}[*; v, s_2]$  και στη συνέχεια καθένα από αυτά με τον πρώτο τρόπο στα δίκτυα  $\mathcal{N}[r_1, u; r_2, v]$ ,  $\mathcal{N}[u, s_1; r_2, v]$  και  $\mathcal{N}[r_1, u; v, s_2]$ ,  $\mathcal{N}[u, s_1; v, s_2]$ , αντίστοιχα. Έτσι, έχουμε:

$$\mathcal{N}[r_1, u; r_2, v]_{i,j} = f((\underbrace{r_1, \dots, r_1, u, \dots, u}_i), (\underbrace{r_2, \dots, r_2, v, \dots, v}_j)),$$

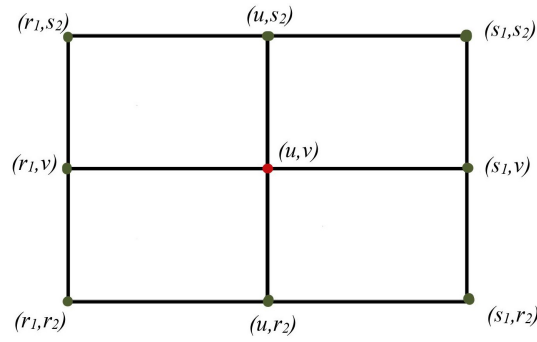
$$\mathcal{N}[u, s_1; r_2, v]_{i,j} = f((\underbrace{u, \dots, u, s_1, \dots, s_1}_i), (\underbrace{r_2, \dots, r_2, v, \dots, v}_j))$$

και

$$\mathcal{N}[r_1, u; v, s_2]_{i,j} = f((\underbrace{r_1, \dots, r_1, u, \dots, u}_i), (\underbrace{v, \dots, v, s_2, \dots, s_2}_j)),$$

$$\mathcal{N}[u, s_1; v, s_2]_{i,j} = f((\underbrace{u, \dots, u, s_1, \dots, s_1}_i), (\underbrace{v, \dots, v, s_2, \dots, s_2}_j)).$$

Παρατηρούμε ότι το σημείο  $F(u, v)$  είναι κοινό και στα τέσσερα δίκτυα.



Σχήμα 10.11: Υποδιαίρεση τετραγωνικού τεμαχίου.

**Παράδειγμα 10.14.** Θεωρούμε το τετραγωνικό δίκτυο ελέγχου βαθμού  $(2, 2)$ ,  $\mathcal{N} = (b_{i,j})_{(i,j) \in \Pi_{2,2}}$ , του Παραδείγματος 10.12, τα ομοπαραλληλικά πλαίσια  $(0, 2)$ ,  $(-1, 1)$  του  $\mathbb{A}$  καθώς και τη διπολυωνυμική επιφάνεια  $F$  η οποία ορίζεται από αυτά. Θα υποδιαιρέσουμε το δίκτυο  $\mathcal{N}$  σε τέσσερα δίκτυα χρησιμοποιώντας το σημείο  $(1, 0)$  και τους υπολογισμούς των Παραδειγμάτων 10.12 και 10.13. Πρώτα, θα υποδιαιρέσουμε το  $\mathcal{N}$  στα υποδίκτυα  $\mathcal{N}[*; -1, 0]$  και  $\mathcal{N}[*; 0, 1]$ . Τα σημεία του  $\mathcal{N}[*; -1, 0]$  είναι:

$$\mathcal{N}[*; -1, 0]_{0,0} = b_{0*,0}^0 = b_{0,0} = (0, 1, 0),$$

$$\mathcal{N}[*; -1, 0]_{1,0} = b_{1*,0}^0 = b_{1,0} = (1, 0, -1),$$

$$\mathcal{N}[*; -1, 0]_{2,0} = b_{2*,0}^0 = b_{2,0} = (2, -1, 0),$$

$$\mathcal{N}[*; -1, 0]_{0,1} = b_{0*,0}^1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$\mathcal{N}[*; -1, 0]_{0,2} = b_{0*,0}^2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right),$$

$$\mathcal{N}[*; -1, 0]_{1,1} = b_{1*,0}^1 = \left(\frac{3}{2}, 0, -1\right),$$

$$\mathcal{N}[*; -1, 0]_{2,1} = b_{2*,0}^1 = \left(1, \frac{1}{2}, 1\right),$$

$$\mathcal{N}[*; -1, 0]_{1,2} = b_{1*,0}^2 = \left(\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, -1\right),$$

$$\mathcal{N}[*; -1, 0]_{2,2} = b_{2*,0}^2 = \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

Τα σημεία του  $\mathcal{N}[*; 0, 1]$  είναι:

$$\mathcal{N}[*; 0, 1]_{0,0} = b_{0*,0}^2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right),$$

$$\mathcal{N}[*; 0, 1]_{1,0} = b_{1*,0}^2 = \left(\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, -1\right),$$

$$\mathcal{N}[*; 0, 1]_{2,0} = b_{2*,0}^2 = \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{1}{4}\right),$$

$$\mathcal{N}[*; 0, 1]_{0,1} = b_{0*,1}^1 = \left(0, 0, \frac{1}{2}\right),$$

$$\mathcal{N}[*; 0, 1]_{0,2} = b_{0*,2}^0 = b_{0,2} = (-1, 0, 0),$$

$$\mathcal{N}[*; 0, 1]_{1,1} = b_{1*,1}^1 = (1, 1, -1),$$

$$\mathcal{N}[*; 0, 1]_{2,1} = b_{2*,1}^1 = \left(\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}\right),$$

$$\mathcal{N}[*; 0, 1]_{1,2} = b_{1*,2}^0 = b_{1,2} = (1, 2, -1),$$

$$\mathcal{N}[*; 0, 1]_{2,2} = b_{2*,2}^0 = b_{2,2} = (1, 2, -2).$$

Στη συνέχεια θα υποδιαιρέσουμε το  $\mathcal{N}[*; -1, 0]$  στα δίκτυα  $\mathcal{N}[0, 1; -1, 0]$  και  $\mathcal{N}[1, 2; -1, 0]$ . Θα υπολογίσουμε τα σημεία του  $\mathcal{N}[0, 1; -1, 0]$ . Αμέσως παίρνουμε τα εξής σημεία:

$$\mathcal{N}[0, 1; -1, 0]_{0,0} = f((0, 0), (-1, -1)) = \mathcal{N}[*; -1, 0]_{0,0} = b_{0*,0}^0 = (0, 1, 0),$$

$$\mathcal{N}[0, 1; -1, 0]_{0,1} = f((0, 0), (-1, 0)) = \mathcal{N}[*; -1, 0]_{0,1} = b_{0*,0}^1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$\mathcal{N}[0, 1; -1, 0]_{0,2} = f((0, 0), (0, 0)) = \mathcal{N}[*; -1, 0]_{0,2} = b_{0*,0}^2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right),$$

$$\mathcal{N}[0, 1; -1, 0]_{1,0} = f((0, 1), (-1, -1)) = \mathcal{N}[0, 1; *]_{1,0} = b_{0*,0}^1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right),$$

$$\mathcal{N}[0, 1; -1, 0]_{2,0} = f((1, 1), (-1, -1)) = \mathcal{N}[0, 1; *]_{2,0} = b_{0*,0}^2 = \left(1, 0, -\frac{1}{2}\right).$$

Γράφουμε:

$$1 = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 \quad \text{και} \quad 0 = \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2} \cdot 1.$$

Έτσι, έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[0, 1; -1, 0]_{1,1} &= f((0, 1), (-1, 0)) \\ &= f\left(\left(0, \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 2\right), (-1, 0)\right) \\ &= \frac{1}{2}f((0, 0), (-1, 0)) + \frac{1}{2}f((0, 2), (-1, 0)) \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{N}[*; -1, 0]_{0,1} + \frac{1}{2}\mathcal{N}[*; -1, 0]_{1,1} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}, 0, -1\right) \\ &= \left(1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[0, 1; -1, 0]_{2,1} &= f((1, 1), (-1, 0)) \\ &= f\left((1, 1), \left(-1, \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2} \cdot 1\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}f((1, 1), (-1, -1)) + \frac{1}{2}f((1, 1), (-1, 1)) \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{N}[0, 1; *]_{2,0} + \frac{1}{2}\mathcal{N}[0, 1; *]_{2,1} \\ &= \frac{1}{2}b_{0*,0}^2 + \frac{1}{2}b_{0*,1}^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(1, 0, -\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, 0\right) \\ &= \left(\frac{9}{8}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\mathcal{N}[0,1;-1,0]_{1,2} &= f((0,1), (0,0)) \\
&= f\left(\left(0, \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 2\right), (0,0)\right) \\
&= \frac{1}{2}f((0,0), (0,0)) + \frac{1}{2}f((0,2), (0,0)) \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{N}[*;-1,0]_{0,2} + \frac{1}{2}\mathcal{N}[*;-1,0]_{1,2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, -1\right) \\
&= \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{8}, -\frac{1}{4}\right)
\end{aligned}$$

και

$$\mathcal{N}[0,1;-1,0]_{2,2} = f((1,1), (0,0)) = F(1,0) = \left(1, \frac{5}{8}, -\frac{3}{8}\right).$$

Ομοίως υπολογίζονται και τα σημεία των τριών άλλων δικτύων.

### Ασκήσεις

**10.6.1** Θεωρούμε την επιφάνεια  $F$  με ίχνος το οποίο ορίζεται από την εξίσωση

$$z = x^3 - 3xy^2.$$

Να υπολογιστεί ένα τριγωνικό δίκτυο για την  $F$  ως προς τα ομοπαράλληλο πλαίσιο  $((0,0), (0,2), (2,0))$  και ένα τετραγωνικό δίκτυο ως προς τα ομοπαράλληλα πλαίσια  $(0,1)$  και  $(-1,1)$ .

**10.6.2** Θεωρούμε την επιφάνεια η οποία ορίζεται από την απεικόνιση

$$F : \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^3, (s,t) \longmapsto (s(s^2+t^2), t(s^2+t^2), s^2t - \frac{t^3}{3}).$$

Να υπολογιστεί ένα τριγωνικό δίκτυο για την  $F$  ως προς το ομοπαράλληλο πλαίσιο  $((0,0), (1,0), (0,1))$  και ένα τετραγωνικό δίκτυο ως προς τα ομοπαράλληλα πλαίσια  $(0,2)$  και  $(-1,1)$ .

**10.6.3** Να κατασκευαστεί ένα τετραγωνικό δίκτυο ελέγχου για την επιφάνεια της οποίας το ίχνος ορίζεται από την εξίσωση

$$z = \frac{1}{6}(x^3 + y^3),$$

ως προς τα ομοπαράλληλα πλαίσια  $(-1,1)$  και  $(-1,1)$ . Επίσης, να κατασκευαστεί ένα τριγωνικό δίκτυο ελέγχου για την ίδια επιφάνεια ως προς το ομοπαράλληλο πλαίσιο  $((0,0), (1,0), (0,1))$ .

**10.6.4** Ας είναι  $F : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$  μία διγραμμική απεικόνιση και  $\mathcal{N} = (b_{i,j})$  το τετραγωνικό δίκτυο ελέγχου βαθμού  $(p,q)$ , με

$$b_{i,j} = F(i/p, j/q) \quad (i = 0, \dots, p, j = 0, \dots, q).$$

Να δειχθεί ότι διπολυωνμική επιφάνεια βαθμού  $(p,q)$  η οποία ορίζεται από το δίκτυο  $\mathcal{N}$  είναι η  $F$ .

**10.6.5** Ας είναι  $(u,v) \in \mathbb{A}^2$  και  $F$  μία διπολυωνμική επιφάνεια βαθμού  $(n,n)$  η οποία ορίζεται από ένα τετραγωνικό δίκτυο ελέγχου,  $\mathcal{N} = (b_{i,j})_{(i,j) \in \Pi_{n,n}}$ , και τα ομοπαράλληλα πλαίσια  $(r_1, s_1)$  και  $(r_2, s_2)$  του  $\mathbb{A}$ . Θεωρούμε την ακολουθία δικτύων  $(b_{i,j}^r)_{(i,j) \in \Pi_{n-r, n-r}}$  ( $r = 0, \dots, n$ ) η οποία ορίζεται ως εξής: Για  $r = 0$  θέτουμε  $b_{i,j}^r = b_{i,j}$  ( $i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, n$ ) και για  $r = 1, \dots, n$ ,

$$b_{i,j}^r = (1-u)(1-v)b_{i,j}^{r-1} + u(1-v)b_{i+1,j}^{r-1} + (1-u)v b_{i,j+1}^{r-1} + uv b_{i+1,j+1}^{r-1},$$

όπου  $0 \leq i, j \leq n-r$ . Να δειχθεί ότι  $F(u,v) = b_{0,0}^n$ .

**10.6.6** Ας είναι  $\Delta rst$  ένα τρίγωνο αναφοράς του  $\mathcal{P}$  και  $\mathcal{N} = (b_{i,j,k})_{(i,j,k) \in \Delta_m}$  ένα τριγωνικό δίκτυο ελέγχου βαθμού  $m$ . Θεωρούμε  $n$  σημεία  $p_i = u_i r + v_i s + w_i t$  (όπου  $u_i + v_i + w_i = 1$ ) και ορίζουμε τα σημεία  $b_{i,j,k}^{l_1, \dots, l_n}$ , όπου  $i + j + k + l_1 + \dots + l_n = m$ , ως εξής:

$$\begin{aligned} b_{i,j,k}^{0, \dots, 0} &= b_{i,j,k}, \\ b_{i,j,k}^{l_1, \dots, l_{h+1}, \dots, l_n} &= u_h b_{i+1,j,k}^{l_1, \dots, l_h, \dots, l_n} + v_h b_{i,j+1,k}^{l_1, \dots, l_h, \dots, l_n} + w_h b_{i,j,k+1}^{l_1, \dots, l_h, \dots, l_n}, \end{aligned}$$

όπου  $h = 1, \dots, n$ . Ας είναι  $F$  η επιφάνεια ολικού βαθμού  $m$  η οποία ορίζεται από το  $\Delta rst$  και το  $\mathcal{N}$ . Συμβολίζουμε με  $f$  την πολική της μορφή. Να δειχθούν τα εξής:

α) Ισχύει:

$$b_{i,j,k}^{l_1, \dots, l_n} = f(\underbrace{r, \dots, r}_i, \underbrace{s, \dots, s}_j, \underbrace{t, \dots, t}_k, \underbrace{p_1, \dots, p_1}_{l_1}, \dots, \underbrace{p_n, \dots, p_n}_{l_n}).$$

β) Για  $n = 1$ , τα σημεία  $(b_{i,j,0}^{l_1})_{(i,j,l_1) \in \Delta_m}$  αποτελούν ένα δίκτυο ελέγχου για την  $F$  ως προς το τρίγωνο αναφοράς  $\Delta rsp_1$ , τα σημεία  $(b_{0,j,k}^{l_1})_{(j,k,l_1) \in \Delta_m}$  ένα δίκτυο ελέγχου για την  $F$  ως προς το τρίγωνο αναφοράς  $\Delta sp_1$  και τα σημεία τα σημεία  $(b_{i,0,k}^{l_1})_{(i,k,l_1) \in \Delta_m}$  ένα δίκτυο ελέγχου για την  $F$  ως προς το τρίγωνο αναφοράς  $\Delta tp_1$ .

γ) Για  $n = 2$ , τα σημεία  $(b_{i,0,0}^{l_1, l_2})_{(i,l_1, l_2) \in \Delta_m}$  αποτελούν ένα δίκτυο ελέγχου για την  $F$  ως προς το τρίγωνο αναφοράς  $\Delta rp_1 p_2$ , τα σημεία  $(b_{0,j,0}^{l_1, l_2})_{(j,l_1, l_2) \in \Delta_m}$  αποτελούν ένα δίκτυο ελέγχου για την  $F$  ως προς το τρίγωνο αναφοράς  $\Delta sp_1 p_2$  και τα σημεία  $(b_{0,0,k}^{l_1, l_2})_{(k,l_1, l_2) \in \Delta_m}$  αποτελούν ένα δίκτυο ελέγχου για την  $F$  ως προς το τρίγωνο αναφοράς  $\Delta tp_1 p_2$ .

δ) Για  $n = 3$ , τα σημεία  $(b_{0,0,0}^{l_1, l_2, l_3})_{(l_1, l_2, l_3) \in \Delta_m}$  αποτελούν ένα δίκτυο ελέγχου για την  $F$  ως προς το τρίγωνο αναφοράς  $\Delta p_1 p_2 p_3$ .

## Βιβλιογραφία

- [1] N. Carter. *Introduction to the Mathematics of Computer Graphics*. Mathematical Association of America, 2016.
- [2] J. Gallier. *Curves and Surfaces in Geometric Modelling: Theory and Algorithms*. San Francisco: The Morgan-Kaufmann Series in Computer Graphics. Morgan-Kauffman Publishers, 1999.
- [3] J. Hoschek. *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*. AK Peters, 1993.
- [4] A. Lastra. *Parametric Geometry of Curves and Surfaces*. Birkhäuser, 2021.
- [5] S. Mann. *A Blossoming Development of Splines*. Morgan & Claypool Publishers, 2006.
- [6] M.E. Mortenson. *Geometric Modelling*. Industrial Press Inc, 2006.
- [7] H. Prautzsch, W. Boehm και M. Paluszny. *Bézier and B-Spline Techniques*. Springer, 2002.
- [8] L. Ramshaw. *Blossoming: A connect the dots approach to splines*. Palo Alto, California: Digital Systems Research Center: SRC reports, 1987.
- [9] L. Ramshaw. "Blossoms are polar forms". Στο: *Computer Aided Geometric Design* 6.4 (1989), σσ. 323–358.
- [10] Thomas W. Sederberg. *Computer Aided Geometric Design*. Faculty Publications, 2012.
- [11] H.P. Seidel. "An introduction to polar forms". Στο: *IEEE Computer Graphics and Applications* 13.1 (1993), σσ. 38–46.
- [12] Θ. Θεοχάρης και Α. Μπεμ. *Γραφικά. Αρχές και Αλγόριθμοι*. Εκδόσεις Συμμετρία, 1999.



## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

## ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

Σε αυτό το παράρτημα υπενθυμίζουμε βασικές έννοιες της Γραμμικής Άλγεβρας οι οποίες χρησιμοποιούνται στο κείμενό μας και δίνουμε μερικά βασικά αποτελέσματα χωρίς απόδειξη. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να τις βρει στο σύγγραμμα [4]. Άλλα συγγράμματα τα οποία μπορεί να συμβουλευτεί ο αναγνώστης για αυτές τις έννοιες και αποτελέσματα είναι αυτά που παρατίθενται στο τέλος του κεφαλαίου.

### A.1 Ορισμοί - Βασικές Ιδιότητες

Πρώτα θα υπενθυμίσουμε τον ορισμό ενός πραγματικού διανυσματικού χώρου. Ας είναι  $V$  ένα μη-κενό σύνολο τα στοιχεία του οποίου τα συμβολίζουμε με λατινικά γράμματα τα οποία φέρουν βελάκια,  $\vec{x}, \vec{y}, \dots$

**Ορισμός A.1.** Το σύνολο  $V$  καλείται *πραγματικός γραμμικός ή διανυσματικός χώρος* (αντίστοιχα  $\mathbb{R}$ -γραμμικός ή  $\mathbb{R}$ -διανυσματικός χώρος) αν υπάρχει μία απεικόνιση την οποία αποκαλούμε *πρόσθεση*

$$V \times V \longrightarrow V, (\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto \vec{x} + \vec{y}$$

και μία απεικόνιση την οποία αποκαλούμε *βαθμωτό πολλαπλασιασμό*

$$\mathbb{R} \times V \longrightarrow V, (k, \vec{x}) \longmapsto k\vec{x}$$

με τις εξής ιδιότητες:

(α) Το ζεύγος  $(V, +)$  αποτελεί αβελιανή ομάδα, δηλαδή ισχύουν τα εξής:

- $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ , για κάθε  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ ,
- $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ , για κάθε  $\vec{x}, \vec{y} \in V$ ,
- υπάρχει στοιχείο  $\vec{0} \in V$  με

$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{x} = \vec{0} + \vec{x}, \text{ για κάθε } \vec{x} \in V,$$

4. για κάθε  $\vec{x} \in V$  υπάρχει στοιχείο  $-\vec{x} \in V$  με

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0} = (-\vec{x}) + \vec{x}.$$

(β) Για κάθε  $\vec{x}, \vec{y} \in V$  και  $a, b \in \mathbb{R}$  ισχύουν τα παρακάτω:

1.  $a(\vec{x} + \vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y}$ ,
2.  $(a + b)\vec{x} = a\vec{x} + b\vec{x}$ ,
3.  $a(b\vec{x}) = (ab)\vec{x}$ ,
4.  $1\vec{x} = \vec{x}$ .

Τα στοιχεία του  $V$  καλούνται *διανύσματα*.

Για κάθε  $\vec{x} \in V$ , το στοιχείο  $-\vec{x}$  είναι μοναδικό και καλείται *αντίθετο στοιχείο* του  $\vec{x}$ . Το  $\vec{0}$  καλείται *μηδενικό στοιχείο* του  $V$ . Επίσης, θα συμβολίζουμε με  $\vec{x} - \vec{y}$  το στοιχείο  $\vec{x} + (-\vec{y})$ .

Ας είναι  $V$  ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος. Έχουμε τις παρακάτω στοιχειώδεις ιδιότητες:

1. Για κάθε  $k \in \mathbb{R}$  ισχύει  $k\vec{0} = \vec{0}$ .
2. Για κάθε  $\vec{v} \in V$  ισχύει  $0\vec{v} = \vec{0}$ .
3. Για κάθε  $\vec{v} \in V$  ισχύει  $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$ .
4. Αν για  $k \in \mathbb{R}$  και  $\vec{v} \in V$  ισχύει  $k\vec{v} = \vec{0}$ , τότε  $k = 0$  ή  $\vec{v} = \vec{0}$ .
5. Αν  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  και  $\vec{u}, \vec{v} \in V$  με  $k\vec{u} = k\vec{v}$ , τότε  $\vec{u} = \vec{v}$ .
6. Αν  $k, l \in \mathbb{R}$  και  $\vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\}$  με  $k\vec{v} = l\vec{v}$ , τότε  $k = l$ .

Στη συνέχεια δίνουμε μερικά παραδείγματα πραγματικών διανυσματικών χώρων.

**Παράδειγμα Α.1.** Το σύνολο  $\mathbb{R}^n$  είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος γραμμικός χώρος. Το άθροισμα δύο στοιχείων του  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  και  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ , ορίζεται ως το στοιχείο

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

και το βαθμωτό γινόμενο ενός πραγματικού αριθμού  $k$  με ένα στοιχείο  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  ορίζεται ως το στοιχείο

$$k\mathbf{x} = (kx_1, \dots, kx_n).$$

**Παράδειγμα Α.2.** Ο δακτύλιος των πολυωνύμων  $\mathbb{R}[X]$  είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με πράξεις τη συνηθισμένη πρόσθεση των πολυωνύμων και βαθμωτό πολλαπλασιασμό τον συνηθισμένο πολλαπλασιασμό ενός πραγματικού αριθμού με ένα πολώνυμο.

**Παράδειγμα Α.3.** Το σύνολο των  $m \times n$  πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς,  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , αποτελεί πραγματικό διανυσματικό χώρο με πράξεις την πρόσθεση πινάκων και τον πολλαπλασιασμό πραγματικού αριθμού με πίνακα.

**Παράδειγμα Α.4.** Ας είναι  $V_1, \dots, V_k$  πραγματικοί διανυσματικοί χώροι. Τότε, το σύνολο  $V = V_1 \times \dots \times V_k$  είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος. Το άθροισμα δύο στοιχείων  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$  και  $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$  του  $V$  ορίζεται ως το στοιχείο

$$(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) + (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n) = (\vec{v}_1 + \vec{w}_1, \dots, \vec{v}_n + \vec{w}_n),$$

και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός ενός πραγματικού αριθμού  $k$  με ένα στοιχείο  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \in V$  ορίζεται το στοιχείο

$$k(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = (k\vec{v}_1, \dots, k\vec{v}_n).$$

**Παράδειγμα Α.5.** Ας είναι  $S$  ένα μη κενό σύνολο και  $V$  ένας πραγματικός γραμμικός χώρος. Θεωρούμε το σύνολο  $F(S, V)$  των απεικονίσεων από το  $S$  στο  $V$ . Ορίζουμε ως άθροισμα δύο απεικονίσεων  $f, g \in F(S, V)$  την απεικόνιση

$$f + g : S \longrightarrow V, x \longmapsto f(x) + g(x)$$

και ως γινόμενο ενός πραγματικού αριθμού  $k \in K$  με μία απεικόνιση  $f \in F(S, V)$  την απεικόνιση

$$kf : S \longrightarrow V, x \longmapsto kf(x).$$

Το σύνολο  $F(S, V)$  εφοδιασμένο με αυτές τις πράξεις αποτελεί έναν πραγματικό γραμμικό χώρο.

## Α.2 Διανυσματικοί Υποχώροι

Ας είναι  $V$  ένας πραγματικός γραμμικός χώρος.

**Ορισμός Α.2.** Ένα μη κενό υποσύνολο  $W$  του  $V$  καλείται *διανυσματικός ή γραμμικός υποχώρος* του  $V$  αν έχει τις εξής δύο ιδιότητες:

(α) Αν  $\vec{u}, \vec{v} \in W$ , τότε  $u + \vec{v} \in W$ .

(β) Αν  $k \in \mathbb{R}$  και  $\vec{w} \in W$ , τότε  $k\vec{w} \in W$ .

Εύκολα βλέπουμε ότι ο περιορισμός της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού του  $V$  επί του  $W$  ορίζουν μία δομή πραγματικού γραμμικού χώρου επί του  $W$ .

**Πρόταση Α.1.** Ένα μη κενό υποσύνολο  $W$  του  $V$  είναι γραμμικός υποχώρος του  $V$  αν και μόνον αν για κάθε  $\vec{u}, \vec{v} \in W$  και  $a, b \in \mathbb{R}$  ισχύει  $a\vec{u} + b\vec{v} \in W$ .

*Απόδειξη.* Βλέπε [4, Πρόταση 7.1] □

Στη συνέχεια θα δώσουμε μερικά παραδείγματα γραμμικών υποχώρων.

**Παράδειγμα Α.6.** Τα σύνολα  $\{\vec{0}\}$  και  $V$  είναι γραμμικοί υποχώροι του  $V$ . Κάθε γραμμικός υποχώρος του  $V$  διαφορετικός από αυτούς τους δύο καλείται *γνήσιος υποχώρος* του  $V$ .

**Παράδειγμα Α.7.** Ας είναι  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Θεωρούμε το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$AX = 0$$

και συμβολίζουμε με  $S$  το σύνολο των λύσεών του. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση Α.1, εύκολα συμπεραίνουμε ότι το  $S$  είναι γραμμικός υποχώρος του  $\mathbb{R}^n$ .

**Παράδειγμα Α.8.** Ας είναι  $n \in \mathbb{N}$ . Συμβολίζουμε με  $\mathbb{R}_n[X]$  το σύνολο των πολωνύμων  $f \in \mathbb{R}[X]$  με  $\deg f \leq n$ . Για κάθε  $f, g \in \mathbb{R}_n[X]$  και  $a \in \mathbb{R}$  ισχύουν οι σχέσεις

$$\deg(f + g) \leq \max\{\deg f, \deg g\} \leq n, \quad \deg(af) = \deg f \leq n.$$

Επομένως,  $f + g, af \in \mathbb{R}_n[X]$  και κατά συνέπεια το σύνολο  $\mathbb{R}_n[X]$  είναι ένας γραμμικός υποχώρος του  $\mathbb{R}[X]$ .

**Πρόταση Α.2.** Ας είναι  $(V_i)_{i \in I}$  μία οικογένεια γραμμικών υποχώρων του  $V$ . Τότε, η τομή  $\bigcap_{i \in I} V_i$  είναι γραμμικός υποχώρος του  $V$ .

*Απόδειξη.* Βλέπε [4, Πρόταση 7.2]. □

Από την άλλη πλευρά η ένωση δύο γραμμικών υποχώρων δεν είναι πάντα γραμμικός υποχώρος. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε τον γραμμικό χώρο  $\mathbb{R}^2$ . Τα σύνολα

$$U = \{(x, 0) / x \in \mathbb{R}\}, \quad W = \{(0, x) / x \in \mathbb{R}\}$$

είναι γραμμικοί υποχώροι του. Έχουμε  $(1, 0) \in U$ ,  $(0, 1) \in W$  και  $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin U \cup W$ . Επομένως, το σύνολο  $U \cup W$  δεν είναι γραμμικός υποχώρος του  $\mathbb{R}^2$ .

Ας είναι  $V$  ένας πραγματικός γραμμικός χώρος και  $V_1, \dots, V_k$  γραμμικοί υποχώροι του.

**Πρόταση Α.3.** Το σύνολο

$$V_1 + \dots + V_k = \{\vec{v}_1 + \dots + \vec{v}_k / \vec{v}_i \in V_i, i = 1, \dots, k\}$$

είναι γραμμικός υποχώρος του  $V$ .

Απόδειξη. Βλέπε [4, Πρόταση 7.3]. □

**Ορισμός Α.3.** Ο γραμμικός υποχώρος  $W$  του  $V$  καλείται *άθροισμα* των  $V_1, \dots, V_k$ , αν ισχύει  $W = V_1 + \dots + V_k$ . Αν επιπλέον ισχύει

$$V_i \cap (V_1 + \dots + V_{i-1} + V_{i+1} + \dots + V_n) = \{\vec{0}\} \quad (i = 1, \dots, k),$$

τότε το  $W$  καλείται *ευθύ άθροισμα* των  $V_1, \dots, V_k$  και σημειώνεται με  $W = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ .

**Παράδειγμα Α.9.** Ο γραμμικός χώρος  $\mathbb{R}^2$  είναι ευθύ άθροισμα των υποχώρων του  $U = \{(x, 0) / x \in \mathbb{R}\}$  και  $W = \{(0, x) / x \in \mathbb{R}\}$ . Πράγματι, αν  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , τότε  $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$  με  $(x, 0) \in U$  και  $(0, y) \in W$ . 'ρα  $\mathbb{R}^2 = U + W$ . Αν  $(x, y) \in U \cap W$ , τότε  $(x, y) \in U$  και  $(x, y) \in W$ , απ' όπου  $x = y = 0$ . Συνεπώς  $U \cap W = \{0\}$ . 'ρα  $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$ .

Ας είναι  $V$  ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος και  $S \subseteq V$ . Συμβολίζουμε με  $\langle S \rangle$  την τομή όλων των γραμμικών υποχώρων του  $V$  που περιέχουν το  $S$ . Σύμφωνα με την Πρόταση Α.2, το σύνολο  $\langle S \rangle$  είναι διανυσματικός υποχώρος του  $V$ . Επομένως, το  $\langle S \rangle$  είναι ο μικρότερος γραμμικός υποχώρος του  $V$  που περιέχει το  $S$ . Αν  $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ , τότε γράφουμε πιο απλά  $\langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \rangle$  αντί  $\langle \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} \rangle$ .

**Ορισμός Α.4.** Ο γραμμικός υποχώρος  $\langle S \rangle$  καλείται *γραμμικός υποχώρος παραγόμενος από το  $S$*  ή *γραμμική θήκη* του  $S$ .

Στη συνέχεια θα χρειαστούμε την παρακάτω έννοια.

**Ορισμός Α.5.** Ας είναι  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in V$ . Ένα διάνυσμα  $\vec{v} \in V$  καλείται *γραμμικός συνδυασμός* των  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ , αν υπάρχουν  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$  τέτοια, ώστε

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + \dots + a_k \vec{v}_k.$$

**Πρόταση Α.4.** Ας είναι  $S$  ένα μη κενό υποσύνολο του  $V$ . Τότε, το  $\langle S \rangle$  είναι το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών από πεπερασμένο πλήθος στοιχείων του  $S$ .

Απόδειξη. Βλέπε [4, Πρόταση 7.5]. □

**Πόρισμα Α.1.** Ας είναι  $U$  και  $W$  δύο γραμμικοί υποχώροι του  $V$ . Τότε

$$\langle U \cup W \rangle = U + W.$$

**Παράδειγμα A.10.** Θεωρούμε τα διανύσματα του  $\mathbb{R}^n$ :

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1).$$

Η γραμμική θήκη του συνόλου που αποτελείται από αυτά είναι το  $\mathbb{R}^n$ . Πράγματι, αν  $x = (a_1, \dots, a_n)$  είναι ένα διάνυσμα του  $\mathbb{R}^n$ , τότε έχουμε

$$x = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$$

και επομένως  $x \in \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ . Έτσι, παίρνουμε  $\mathbb{R}^n \subseteq \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ , απ' όπου  $\mathbb{R}^n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ .

**Παράδειγμα A.11.** Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο  $\mathbb{R}[X]$  και το υποσύνολο του,

$$S = \{X^n / n \in \mathbb{N}\}.$$

Αν  $f \in \mathbb{R}[X]$ , τότε  $f = a_0 + a_1 X + \dots + a_m X^m$ , με  $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ . 'ρα  $f \in \langle S \rangle$ . Επομένως  $\mathbb{R}[X] \subseteq \langle S \rangle$ , απ' όπου  $\mathbb{R}[X] = \langle S \rangle$ . Ομοίως, έχουμε  $\mathbb{R}_n[X] = \langle 1, X, \dots, X^n \rangle$ .

### A.3 Βάση Διανυσματικού Χώρου

Ας είναι  $V$  ένας πραγματικός γραμμικός χώρος και  $S$  ένα μη κενό υποσύνολο του  $V$ .

**Ορισμός A.6.** Το σύνολο  $S$  καλείται *γραμμικώς εξαρτημένο* αν υπάρχουν  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in S$  και  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ , όχι όλα μηδέν, έτσι, ώστε

$$a_1 \vec{v}_1 + \dots + a_k \vec{v}_k = 0.$$

Διαφορετικά, το σύνολο  $S$  καλείται *γραμμικώς ανεξάρτητο*.

Πιο αναλυτικά, αν  $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ , τότε το  $S$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητο αν και μόνον αν η ισότητα

$$a_1 \vec{v}_1 + \dots + a_k \vec{v}_k = 0,$$

με  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ , έπεται  $a_1 = \dots = a_k = 0$ . Συχνά λέμε ότι τα στοιχεία  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (αντίστοιχα εξαρτημένα) αντί ότι το σύνολο  $S$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητο (αντίστοιχα εξαρτημένο). Αν το  $S$  είναι άπειρο, τότε αυτό είναι γραμμικώς ανεξάρτητο αν και μόνον αν αυτή η ιδιότητα ισχύει για οποιοδήποτε πεπερασμένο πλήθος στοιχείων του  $S$ .

Παρατηρούμε ότι κάθε διάνυσμα  $\vec{x} \neq \vec{0}$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητο γιατί αν  $a\vec{x} = \vec{0}$  με  $a \in \mathbb{R}$ , τότε  $a = 0$ . Αντίθετα, το  $\vec{0}$  είναι γραμμικώς εξαρτημένο γιατί για κάθε  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ισχύει  $k\vec{0} = \vec{0}$ .

**Παράδειγμα A.12.** Τα διανύσματα

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

αποτελούν ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο του  $\mathbb{R}^n$ . Πράγματι, ας είναι  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  με

$$a_1 e_1 + \dots + a_n e_n = (0, \dots, 0).$$

Από την άλλη πλευρά, έχουμε

$$a_1 e_1 + \dots + a_n e_n = (a_1, \dots, a_n).$$

'ρα  $a_1 = \dots = a_n = 0$  και επομένως τα  $e_1, \dots, e_n$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.



**Παράδειγμα A.13.** Θα δείξουμε ότι το σύνολο

$$S = \{X^n / n \in \mathbb{N}\}$$

είναι ένα γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του  $\mathbb{R}[X]$ . Ας είναι

$$\{X^{n_1}, \dots, X^{n_l}\},$$

όπου  $n_1, \dots, n_l$  διαφορετικοί φυσικοί αριθμοί, ένα τυχόν πεπερασμένο υποσύνολο του  $S$ . Αν  $a_1, \dots, a_l \in \mathbb{R}$  είναι τέτοια, ώστε

$$a_1 X^{n_1} + \dots + a_l X^{n_l} = 0,$$

τότε, από τον ορισμό της ισότητας των πολυωνύμων, έχουμε  $a_1 = \dots = a_l = 0$ . 'ρα, το  $S$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του  $\mathbb{R}[X]$ .

**Πρόταση A.5.** Ας είναι  $S$  ένα μη κενό υποσύνολο του  $V$ . Το σύνολο  $S$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητο αν και μόνον αν κάθε  $\vec{v} \in \langle S \rangle$  γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του  $S$ .

Απόδειξη. Βλέπε [4, Πρόταση 7.6]. □

**Πόρισμα A.2.** Ας είναι  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \in V$ . Τα  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν και μόνον αν ισχύει

$$\langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \rangle = \langle \vec{v}_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \vec{v}_m \rangle.$$

Ας είναι  $V$  ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος.

**Ορισμός A.7.** Ένα υποσύνολο  $B$  του  $V$  καλείται *βάση* του  $V$ , αν είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και ισχύει  $\langle B \rangle = V$ .

Σύμφωνα με την Πρόταση A.5, αν  $B$  είναι μία βάση του  $V$ , τότε κάθε στοιχείο του  $V$  γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός (πεπερασμένου πλήθους) στοιχείων του  $B$ .

**Ορισμός A.8.** Αν  $\vec{x} \in V$ , τότε τα στοιχεία  $a_1, \dots, a_k \in K$  που είναι τέτοια, ώστε  $\vec{x} = a_1 \vec{v}_1 + \dots + a_k \vec{v}_k$ , με  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in B$ , καλούνται *συντεταγμένες* του  $\vec{x}$  ως προς τη βάση  $B$ .

**Παράδειγμα A.14.** Τα διανύσματα

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

αποτελούν μία βάση του  $\mathbb{R}^n$ . Πράγματι, από το Παράδειγμα A.10 έχουμε  $\langle e_1, \dots, e_n \rangle = \mathbb{R}^n$  και από το Παράδειγμα A.12 ότι τα  $e_1, \dots, e_n$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. 'ρα, τα  $e_1, \dots, e_n$  σχηματίζουν μία βάση του  $\mathbb{R}^n$  η οποία καλείται *κανονική*.

**Παράδειγμα A.15.** Ας είναι  $B_{i,j}$  ο πίνακας του  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  που το  $(i, j)$ -στοιχείο του είναι το 1 ενώ τα υπόλοιπα είναι 0. Με τον ίδιο τρόπο, όπως και στην περίπτωση της κανονικής βάσης του  $\mathbb{R}^n$  μπορεί να δείξουμε ότι οι πίνακες  $B_{i,j}$  ( $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ ) αποτελούν μία βάση του γραμμικού χώρου  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ .

**Παράδειγμα A.16.** Μία βάση του  $\mathbb{R}[X]$  δίνεται από το σύνολο

$$S = \{X^n / n \in \mathbb{N}\}.$$

Πράγματι, από το Παράδειγμα A.11 έχουμε  $\mathbb{R}[X] = \langle S \rangle$  και από το Παράδειγμα A.13 ότι το  $S$  είναι ένα γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο. Άρα, το  $S$  αποτελεί μία βάση του  $\mathbb{R}[X]$ .

Επίσης, είδαμε ότι  $\mathbb{R}_n[X] = \langle 1, X, \dots, X^n \rangle$ . Επιπλέον, το σύνολο  $\{1, X, \dots, X^n\}$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητο ως υποσύνολο του  $S$ . Συνεπώς, το σύνολο αυτό αποτελεί μία βάση του  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**Θεώρημα Α.1.** *Ας είναι  $A$  ένα μη κενό υποσύνολο του  $V$  με  $A \neq \{0\}$ . Τότε το σύνολο  $\mathcal{W}$  των γραμμικώς ανεξάρτητων υποσυνόλων του  $A$  περιέχει ένα στοιχείο  $\mathcal{B}$  τέτοιο, ώστε για κάθε  $S \in \mathcal{W}$  με  $\mathcal{B} \subseteq S$  ισχύει  $\mathcal{B} = S$ . Επιπλέον, για κάθε τέτοιο στοιχείο ισχύει  $\langle A \rangle = \langle \mathcal{B} \rangle$ .*

Απόδειξη. Βλέπε [4, Θεώρημα 7.1] □

**Πόρισμα Α.3.** *Ο διανυσματικός χώρος  $V$  έχει τουλάχιστον μία βάση.*

**Πόρισμα Α.4.** *Κάθε γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του  $V$  μπορεί να συμπληρωθεί σε μία βάση του  $V$ .*

**Πόρισμα Α.5.** *Ας είναι  $U$  ένας γραμμικός υποχώρος του  $V$ . Τότε υπάρχει γραμμικός υποχώρος  $W$  του  $V$  τέτοιος, ώστε  $V = U \oplus W$ .*

**Θεώρημα Α.2.** *Ας είναι  $\{v_1, \dots, v_m\}$  μία βάση του  $V$ . Αν  $u_1, \dots, u_n$  είναι στοιχεία του  $V$ , με  $n > m$ , τότε αυτά είναι γραμμικώς εξαρτημένα.*

Απόδειξη. Βλέπε [4, Θεώρημα 7.2] □

**Πόρισμα Α.6.** *Αν ο διανυσματικός χώρος  $V$  έχει μία βάση  $B$  με  $|B| = n < \infty$ , τότε κάθε άλλη βάση του έχει ακριβώς  $n$  στοιχεία.*

**Ορισμός Α.9.** *Ας είναι  $B$  μία βάση του  $V$ . Αν το πλήθος των στοιχείων της  $B$  είναι άπειρο, τότε ο  $V$  καλείται απειροδιάστατος. Αν  $|B| = n < \infty$ , τότε ο  $V$  καλείται πεπερασμένης διάστασης και ο αριθμός  $n$  διάσταση του  $V$ . Τότε, γράφουμε  $\dim V = n$ . Επίσης, για τον γραμμικό χώρο  $V = \{0\}$  λέμε ότι έχει διάσταση 0.*

**Παράδειγμα Α.17.** Από το Παράδειγμα Α.14 έχουμε  $\dim \mathbb{R}^n = n$ .

**Παράδειγμα Α.18.** Από το Παράδειγμα Α.15, έχουμε  $\dim M_{m \times n}(\mathbb{R}) = mn$ .

**Παράδειγμα Α.19.** Σύμφωνα με το Παράδειγμα Α.16, ο γραμμικός χώρος  $\mathbb{R}[X]$  είναι απειροδιάστατος. Από την άλλη πλευρά ο υποχώρος του  $\mathbb{R}_n[X]$  έχει διάσταση  $n + 1$ .

**Πρόταση Α.6.** *Ας είναι  $\dim V = n$  και  $v_1, \dots, v_n \in V$ . Τότε ισχύουν τα εξής:*

- (α) *Αν το σύνολο  $\{v_1, \dots, v_n\}$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, τότε αυτό είναι μία βάση του  $V$ .*
- (β) *Αν ισχύει  $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = V$ , τότε το σύνολο  $\{v_1, \dots, v_n\}$  είναι μία βάση του  $V$ .*

Απόδειξη. Βλέπε [4, Πρόταση 7.7] □

**Πόρισμα Α.7.** *Ας είναι  $\dim V = n$  και  $W$  ένας γραμμικός υποχώρος του  $V$ . Τότε  $\dim W \leq n$  και αν  $\dim W = n$ , τότε  $V = W$ .*

**Πρόταση Α.7.** *Αν ο γραμμικός χώρος  $V$  είναι πεπερασμένης διάστασης και  $U, W$  είναι υποχώροι, τότε*

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W.$$

Απόδειξη. Βλέπε [4, Πρόταση 7.8]. □

**Πόρισμα Α.8.** *Αν ο γραμμικός χώρος  $V$  έχει πεπερασμένη διάσταση και  $U_1, \dots, U_m$  είναι υποχώροι του έτσι, ώστε*

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m,$$

τότε

$$\dim V = \dim U_1 + \dots + \dim U_m.$$

#### A.4 Γραμμικές Απεικονίσεις

Ας είναι  $V, W$  δύο πραγματικοί διανυσματικοί χώροι και  $f : V \rightarrow W$  μία απεικόνιση.

**Ορισμός A.10.** Η απεικόνιση  $f$  καλείται *γραμμική*, αν ισχύουν οι εξής δύο ιδιότητες:

(α) Για κάθε  $\vec{x}, \vec{y} \in V$  έχουμε

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}).$$

(β) Για κάθε  $a \in \mathbb{R}$  και  $\vec{x} \in V$  έχουμε

$$f(a\vec{x}) = af(\vec{x}).$$

Αν η γραμμική απεικόνιση  $f$  είναι ένεση (αντίστοιχα έφεση), τότε καλείται *μονομορφισμός* (αντίστοιχα *επιμορφισμός*). Αν η γραμμική απεικόνιση  $f$  είναι συγχρόνως ένεση και έφεση, τότε καλείται *ισομορφισμός*. Στην περίπτωση όπου η  $f$  είναι ισομορφισμός, λέμε ότι οι γραμμικοί χώροι  $V$  και  $W$  είναι *ισόμορφοι* και γράφουμε  $V \cong W$ . Αν  $W = V$ , τότε η γραμμική απεικόνιση  $f$  καλείται *ενδομορφισμός*. Επίσης, αν  $W = V$  και η  $f$  είναι ισομορφισμός, τότε καλείται *αυτομορφισμός*.

Συμβολίζουμε με  $L(V, W)$  το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων από τον χώρο  $V$  στο  $W$ . Σύμφωνα με το Παράδειγμα A.5, το σύνολο  $F(V, W)$  μπορεί να δομηθεί σε πραγματικό διανυσματικό χώρο. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το σύνολο  $L(V, W)$  είναι γραμμικός υποχώρος του  $F(V, W)$  και κατά συνέπεια είναι ένας πραγματικός γραμμικός χώρος.

Εύκολα βλέπουμε ότι  $f(\vec{0}) = \vec{0}$  και για κάθε  $\vec{v} \in V$  ισχύει  $f(-\vec{v}) = -f(\vec{v})$ . Αν  $U$  είναι γραμμικός υποχώρος του  $V$ , τότε το σύνολο  $f(U)$  είναι γραμμικός υποχώρος του  $W$ . Ομοίως, αν  $E$  είναι γραμμικός υποχώρος του  $W$ , τότε το σύνολο  $f^{-1}(E)$  είναι γραμμικός υποχώρος του  $V$ . Ειδικότερα, το σύνολο  $\text{Ker}(f) = \{\vec{v} \in V / f(\vec{v}) = \vec{0}\}$  της  $f$  είναι γραμμικός υποχώρος του  $V$ .

**Ορισμός A.11.** Το σύνολο  $\text{Ker}(f)$  καλείται *πυρήνας* της  $f$ .

**Πρόταση A.8.** Η απεικόνιση  $f$  είναι γραμμική αν και μόνον αν για κάθε  $\vec{x}, \vec{y} \in V$  και  $a, b \in \mathbb{R}$  ισχύει:

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y).$$

*Απόδειξη.* Βλέπε [4, Πρόταση 8.1] □

**Πρόταση A.9.** Η σύνθεση δύο γραμμικών απεικονίσεων είναι γραμμική απεικόνιση.

*Απόδειξη.* Βλέπε [4, Πρόταση 8.2] □

**Πρόταση A.10.** Ας είναι  $f : V \rightarrow W$  ένας ισομορφισμός γραμμικών χώρων επί του σώματος  $K$ . Τότε η απεικόνιση  $f^{-1} : W \rightarrow V$  είναι επίσης γραμμική.

*Απόδειξη.* Βλέπε [4, Πρόταση 8.3] □

Στη συνέχεια θα δώσουμε μερικά παραδείγματα γραμμικών απεικονίσεων.

**Παράδειγμα A.20.** Για κάθε γραμμικό χώρο  $V$  η ταυτοτική απεικόνιση  $I_V$  είναι προφανώς γραμμική.

**Παράδειγμα A.21.** Η απεικόνιση  $\psi_{m,n} : M_{m \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{mn}$  η οποία σε κάθε πίνακα  $A = (a_{i,j})$  απεικονίζει το διάνυσμα

$$\psi_{m,n}(A) = (a_{1,1}, \dots, a_{1,n}, a_{2,1}, \dots, a_{2,n}, \dots, a_{m,1}, \dots, a_{m,n})$$

είναι ισομορφισμός γραμμικών χώρων.

**Παράδειγμα A.22.** Ας είναι  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Οι απεικονίσεις

$$f_A : M_{n \times r}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{m \times r}(\mathbb{R}), X \longmapsto AX$$

και

$$g_A : M_{r \times m}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{r \times n}(\mathbb{R}), X \longmapsto XA$$

είναι γραμμικές. Πράγματι, αν  $X, Y \in M_{n \times r}(\mathbb{R})$  και  $a, b \in \mathbb{R}$ , τότε

$$\begin{aligned} f_A(aX + bY) &= A(aX + bY) = \\ &= A(aX) + A(bY) = a(AX) + b(AY) = af_A(X) + bf_A(Y). \end{aligned}$$

Ομοίως, δείχνουμε ότι και η απεικόνιση  $g$  είναι γραμμική.

**Παράδειγμα A.23.** Ας είναι  $A = (a_{i,j})$  ένας πίνακας του  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Η απεικόνιση

$$h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \left( \sum_{j=1}^n a_{1,j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{m,j}x_j \right)$$

είναι γραμμική. Για να το δούμε αρκεί να παρατηρήσουμε ότι  $h = \psi_{n,1} \circ f_A \circ \psi_{m,1}^{-1}$ , απ' όπου η Πρόταση A.9 δίνει το αποτέλεσμα.

**Παράδειγμα A.24.** Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\psi : K[X] \longrightarrow K[X], f \longmapsto f'$$

που απεικονίζει κάθε πολυώνυμο  $f$  στην τυπική του παράγωγο  $f'$ . Εύκολα προκύπτει ότι για κάθε  $f, g \in K[X]$  και  $a \in K$  ισχύει

$$(f + g)' = f' + g', \quad (af)' = af'.$$

Έτσι, παίρνουμε

$$\psi(f + g) = \psi(f) + \psi(g), \quad \psi(af) = a\psi(f)$$

και κατά συνέπεια η απεικόνιση  $\psi$  είναι γραμμική.

**Παράδειγμα A.25.** Η απεικόνιση

$$\alpha : M_{m \times n}(K) \longrightarrow M_{n \times m}(K), A \longmapsto {}^t A$$

είναι ισομορφισμός. Πραγματικά, για κάθε  $A, B \in M_{m \times n}(K)$  και  $k \in K$  έχουμε

$${}^t(A + B) = {}^t A + {}^t B, \quad {}^t(kA) = k {}^t A$$

και επομένως η απεικόνιση  $\alpha$  είναι γραμμική. Αν  ${}^t A = {}^t B$ , τότε  ${}^t({}^t A) = {}^t({}^t B)$ , απ' όπου  $A = B$ . 'ρα η  $\alpha$  είναι ένεση. Επίσης, αν  $C \in M_{n \times m}(K)$ , τότε από την ισότητα  $C = {}^t({}^t C)$  έχουμε  $A = \alpha({}^t C)$  και επομένως η  $\alpha$  είναι έφεση. Συνεπώς, η απεικόνιση  $\alpha$  είναι ισομορφισμός.

**Πρόταση A.11.** Ας είναι  $f : V \rightarrow W$  μία γραμμική απεικόνιση και  $S \subseteq V$  με  $V = \langle S \rangle$ . Τότε  $f(V) = \langle f(S) \rangle$ .

Απόδειξη. Βλέπε [4, Πρόταση 8.4] □

**Πρόταση A.12.** Ας είναι  $f : V \rightarrow W$  μία γραμμική απεικόνιση. Αν η  $f$  είναι ισομορφισμός, τότε για κάθε βάση  $B$  του  $V$  η εικόνα της  $f(B)$  είναι βάση του  $W$ . Αντίστροφα, αν υπάρχει μία βάση  $B$  βάση του  $V$  τέτοια, ώστε η εικόνα της  $f(B)$  να είναι βάση του  $W$ , τότε η  $f$  είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη. Βλέπε [4, Πρόταση 8.5] □

**Πρόταση A.13.** *Ας είναι  $\{e_1, \dots, e_n\}$  μία βάση του  $V$ . Για κάθε επιλογή διανυσμάτων  $w_1, \dots, w_n \in W$  υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση  $f : V \rightarrow W$  τέτοια, ώστε  $f(e_i) = w_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).*

Απόδειξη. Βλέπε [4, Πρόταση 8.6] □

**Πόρισμα A.9.** *Ας είναι  $f : V \rightarrow W$  και  $g : V \rightarrow W$  δύο γραμμικές απεικονίσεις. Αν  $\{e_1, \dots, e_n\}$  είναι μία βάση του  $V$  και  $f(e_i) = g(e_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ), τότε  $f = g$ .*

Το παρακάτω θεώρημα συνδέει τη διάσταση του πεδίου ορισμού μίας γραμμικής απεικόνισης με τις διαστάσεις του πυρήνα και της εικόνας της.

**Θεώρημα A.3.** *Ας υποθέσουμε ότι  $f : V \rightarrow W$  είναι μία γραμμική απεικόνιση και ο διανυσματικός χώρος  $V$  πεπερασμένης διάστασης. Τότε ο χώρος  $f(V)$  είναι πεπερασμένης διάστασης και ισχύει*

$$\dim V = \dim \text{Ker}(f) + \dim f(V).$$

Απόδειξη. Βλέπε [4, Θεώρημα 8.1] □

**Πόρισμα A.10.** *Ας είναι  $U$  και  $W$  δύο διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης. Τότε, οι χώροι  $U$  και  $W$  είναι ισόμορφοι αν και μόνον αν έχουν την ίδια διάσταση. Επίσης, αν  $V$  είναι  $V$  πραγματικός διανυσματικός χώρος διάστασης  $n$ , τότε  $V \cong \mathbb{R}^n$ .*

## A.5 Πίνακες και Γραμμικές Απεικονίσεις

Σ' αυτή την ενότητα θα υπενθυμίσουμε την έννοια του πίνακα μίας γραμμικής απεικόνισης.

**Ορισμός A.12.** *Ας είναι  $V$  γραμμικός χώρος διάστασης  $n$ . Καλούμε διατεταγμένη βάση του  $V$  κάθε  $n$ -άδα  $(v_1, \dots, v_n) \in V^n$  τέτοια, ώστε το σύνολο  $\{v_1, \dots, v_n\}$  να είναι βάση του  $V$ .*

Ας είναι  $V, W$  δύο πραγματικοί γραμμικοί χώροι με  $\dim V = m$ ,  $\dim W = n$  και  $f : V \rightarrow W$  μία γραμμική απεικόνιση. Θεωρούμε τις διατεταγμένες βάσεις  $B = (v_1, \dots, v_m)$  και  $C = (w_1, \dots, w_n)$  των  $V$  και  $W$ , αντίστοιχα. Αναλύουμε τα διανύσματα  $f(v_1), \dots, f(v_m)$  στη βάση  $C$  και έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} f(v_1) &= a_{1,1}w_1 + \dots + a_{n,1}w_n, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ f(v_m) &= a_{1,m}w_1 + \dots + a_{n,m}w_n, \end{aligned}$$

όπου  $a_{i,j} \in K$ . Κατόπιν σχηματίζουμε τον πίνακα

$$M_C^B(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix}.$$

**Ορισμός A.13.** *Ο πίνακας  $M_C^B(f)$  καλείται πίνακας της  $f$  ως προς τις βάσεις  $B$  και  $C$ . Αν  $V = W$  και  $B = C$ , τότε λέμε ότι ο  $M_B^B(f)$  είναι ο πίνακας της  $f$  ως προς τη βάση  $B$ . Ο πίνακας  $M_C^B(I_V)$  καλείται επίσης και πίνακας μετάβασης από τη βάση  $C$  στη  $B$ .*

**Παράδειγμα A.26.** *Ας είναι  $V$  ένας γραμμικός χώρος διάστασης  $m$ . Ο πίνακας της ταυτοτικής απεικόνισης  $I_V$  του  $V$  ως προς μία οποιαδήποτε βάση του  $V$  είναι ο ταυτοτικός πίνακας.*

**Παράδειγμα A.27.** Θα προσδιορίσουμε τον πίνακα της γραμμικής απεικόνισης

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \longmapsto (x + y + z, y - z)$$

ως προς τις διατεταγμένες βάσεις  $B = ((1, 0, 1), (-1, 1, 0), (0, 1, 2))$  του  $\mathbb{R}^3$  και  $C = ((1, 0), (0, 1))$  του  $\mathbb{R}^2$ . Έχουμε

$$\begin{aligned} f(1, 0, 1) &= (2, -1) = 2(1, 0) - (0, 1), \\ f(-1, 1, 0) &= (0, 1), \\ f(0, 1, 2) &= (3, -1) = 3(1, 0) - (0, 1). \end{aligned}$$

Άρα, ο ζητούμενος πίνακας είναι

$$M_C^B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Το παρακάτω θεώρημα συνδέει τον χώρο των γραμμικών απεικονίσεων μεταξύ δύο γραμμικών χώρων με τον χώρο των πινάκων.

**Θεώρημα A.4.** Η απεικόνιση

$$M_C^B : L(V, W) \longrightarrow M_{n \times m}(\mathbb{K}), f \longmapsto M_C^B(f)$$

είναι ένας ισομορφισμός γραμμικών χώρων.

*Απόδειξη.* Βλέπε [4, Θεώρημα 8.2]. □

Ας θεωρήσουμε τώρα μία άλλη γραμμική απεικόνιση  $g : W \rightarrow U$  και μία βάση  $D = \{u_1, \dots, u_p\}$  του  $U$ . Ας είναι  $M_D^C(g) = (b_{ij})$  ο πίνακας της  $g$  ως προς τις βάσεις  $C$  και  $D$ . Τότε έχουμε το εξής αποτέλεσμα:

**Πρόταση A.14.** Ισχύει  $M_D^B(g \circ f) = M_D^C(g)M_C^B(f)$ .

*Απόδειξη.* Βλέπε [4, Πρόταση 8.9]. □

Μία συνέπεια της προηγούμενης πρότασης είναι το εξής αποτέλεσμα:

**Πρόταση A.15.** Η γραμμική απεικόνιση  $f$  είναι ισομορφισμός αν και μόνον αν ο πίνακας  $M_C^B(f)$  είναι αντιστρέψιμος. Τότε ισχύει

$$M_B^C(f^{-1}) = M_C^B(f)^{-1}.$$

*Απόδειξη.* Βλέπε [4, Πρόταση 8.10]. □

Η επομένη πρόταση μας δίνει τη σχέση που έχουν οι πίνακες μίας γραμμικής απεικόνισης ως προς δύο διαφορετικά ζεύγη διατεταγμένων βάσεων.

**Πρόταση A.16.** Ας είναι  $V$  και  $W$  δύο γραμμικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης και  $f : V \rightarrow W$  μία γραμμική απεικόνιση. Αν  $B, B'$  είναι δύο διατεταγμένες βάσεις του  $V$  και  $C, C'$  δύο διατεταγμένες βάσεις του  $W$ , τότε

$$M_{C'}^{B'}(f) = M_{C'}^C(I_W)M_C^B(f)M_B^{B'}(I_V).$$

*Απόδειξη.* Βλέπε [4, Πρόταση 8.12]. □

Ας είναι  $V$  ένας πραγματικός γραμμικός χώρος διάστασης  $n$  και  $f : V \rightarrow V$  ένας ενδομορφισμός του.

**Ορισμός A.14.** Ένας πραγματικός αριθμός  $\lambda$  καλείται *ιδιοτιμή* του  $f$ , αν υπάρχει διάνυσμα  $\vec{v} \in V$  με  $\vec{v} \neq 0$  τέτοιο, ώστε  $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ . Το διάνυσμα  $v$  καλείται *ιδιοδιάνυσμα* που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda$ .



**Παράδειγμα Α.29.** Θεωρούμε τον ενδομορφισμό

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto (2x + y, y - z, 2y + 4z).$$

Θα προσδιορίσουμε τις ιδιοτιμές του και τους αντίστοιχους ιδιοχώρους.

Πρώτα θα υπολογίσουμε τον πίνακα του  $f$  ως προς την κανονική βάση  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$ ,  $e_3 = (0, 0, 1)$ . Έχουμε

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (2, 0, 0) = 2e_1 \\ f(e_2) &= (1, 1, 2) = e_1 + e_2 + 2e_3 \\ f(e_3) &= (0, -1, 4) = -e_2 + 4e_3 \end{aligned}$$

και επομένως ο πίνακας του  $f$  ως προς την κανονική βάση  $(e_1, e_2, e_3)$  είναι

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $f$  είναι

$$P_f(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 3).$$

Συνεπώς, οι ιδιοτιμές του  $f$  είναι  $\lambda = 2, 3$ .

Ο ιδιοχώρος  $V(2)$  είναι το σύνολο των τριάδων  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  που είναι τέτοιες, ώστε

$$\begin{aligned} (2 - 2)x_1 + x_2 &= 0 \\ (1 - 2)x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_2 + (4 - 2)x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Οπότε, παίρνουμε  $x_2 = x_3 = 0$  και κατά συνέπεια

$$V(2) = \{k(1, 0, 0) / k \in \mathbb{R}\}.$$

Ο ιδιοχώρος  $V(3)$  είναι το σύνολο των τριάδων  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  που ικανοποιούν τις ισότητες

$$\begin{aligned} (2 - 3)x_1 + x_2 &= 0 \\ (1 - 3)x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_2 + (4 - 3)x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Έτσι, παίρνουμε  $x_1 = x_2$  και  $x_3 = -2x_2$ . Επομένως

$$V(3) = \{k(1, 1, -2) / k \in \mathbb{R}\}.$$

## Βιβλιογραφία

- [1] Banchoff T.F. και J. Wermer. *Η Γραμμική Άλγεβρα μέσω Γεωμετρίας*. Leader Books, 2009.
- [2] S. Lang. *Introduction to Linear Algebra*. Springer Verlag, 1986.
- [3] Α. Πάπιστας. *Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα*. Εκδόσεις Τζιόλα, 2019.
- [4] Δ. Πουλάκης. *Άλγεβρα*. Εκδόσεις Ζήτη, 2021.
- [5] Σ. Μποζαπαλίδης. *Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα*. Εκδόσεις Αϊβάζη, 2010.





# ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

---

- άθροισμα υποχώρων, 202
- ακολουθία κόμβων, 127
- αλγόριθμος του Aitken, 147
- αλγόριθμος του de Casteljau, 101, 169, 187
- αλγόριθμος υποδιαίρεσης, 175
- απλός κόμβος, 127
- βάση διανυσματικού χώρου, 204
- βαρυκεντρικές συντεταγμένες, 18
- βαρύκεντρο τριγώνου, 25
- βασική B-spline συνάρτηση, 138
- γραμμική απεικόνιση, 206
- γραμμική θήκη, 202
- γραμμικοποίηση, 60, 79
- γραμμικοποίηση ομοπαραλληλικού χώρου, 53
- γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων, 202
- γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο, 203
- γραμμικώς εξαρτημένο σύνολο, 203
- γωνία τετραγωνικού τεμαχίου, 192
- γωνία τριγωνικού τεμαχίου, 174
- διάγραμμα του de Casteljau, 107
- διάνυσμα, 1
- διάσταση ομοπαραλληλικού χώρου, 1
- διανυσματικός υποχώρος, 201
- διαστολή, 46
- ευθύ άθροισμα υποχώρων, 202
- ευθύγραμμο τμήμα, 25
- εφαπτομένη ευθεία, 117
- θεώρημα του Μενελάου, 31
- θεώρημα του Θαλή, 27
- θεώρημα του Ceva, 33
- θεώρημα του Desargues, 32
- θεώρημα του Πάππου, 29
- ισοπαραμετρική καμπύλη, 182
- ίχνος, 83
- ίχνος επιφάνειας ολικού βαθμού, 163
- καμπύλη B-spline, 128
- Καρτεσιανές συντεταγμένες, 17
- κεντρομόλος παραμετροποίηση, 161
- κυκλική B-spline καμπύλη, 132
- κυκλική ακολουθία κόμβων, 131
- κυρτό κάλυμμα, 11
- κυρτός συνδυασμός, 11
- κόμβος, 127
- μέσο, 22
- μορφή του *Bézier* της  $F$  ως προς το ομοπαραλληλικό πλαίσιο  $(r, s)$ , 93
- νόμος του παραλληλογράμμου, 5
- ομογενοποίηση, 60, 79
- ομογενοποίηση ομοπαραλληλικού χώρου, 53
- ομοθεσία, 46
- ομοιόμορφη ακολουθία κόμβων, 127
- ομοπαραλληλική μορφή, 48
- ομοπαραλληλική πολυωνυμική απεικόνιση, 73
- ομοπαραλληλικό σύστημα συντεταγμένων, 17
- ομοπαραλληλικός αυτομορφισμός, 43
- ομοπαραλληλικός ισομορφισμός, 43
- ομοπαραλληλικός χώρος, 1
- ομοπαραλληλικώς ανεξάρτητα σημεία, 17
- παράγωγος, 115
- παραλληλόγραμμο, 36
- παραμετροποίηση, 161
- παραμετροποίηση μήκους χορδής, 161
- παραμετροποιημένη πολυωνυμική επιφάνεια, 187
- πολλαπλότητα κόμβου, 127

πολυωνυμική επιφάνεια ολικού βαθμού, 163  
πολυωνυμική καμπύλη, 83  
πολυώνυμα του Bernstein, 87, 165  
πολυώνυμα του Hermite τρίτου βαθμού, 152  
πολυώνυμο του Lagrange, 149  
πολύγωνο ελέγχου, 107  
πραγματικός γραμμικός χώρος, 199  
πραγματικός διανυσματικός χώρος, 199  
πυρήνας, 48  
σημεία ελέγχου του Bzier, 86  
σημεία ελέγχου, 183  
σημείο, 1  
σημείο ελέγχου του de Boor, 129  
στοιχειώδεις συμμετρικές απεικονίσεις, 64  
ταυτότητα του Chasles, 5  
τετραγωνικό δίκτυο ελέγχου, 183  
τετραγωνικό τεμάχιο επιφανείας, 192  
τμήμα, 83  
τμηματικά πολυωνυμική καμπύλη, 128  
τρίγωνο, 25  
τρίγωνο αναφοράς, 164  
τριγωνικό δίκτυο ελέγχου, 166  
τριγωνικό τεμάχιο επιφανείας, 174